

Modules de Hodge Polarisables

Par

Morihiro SAITO*,**

Introduction

Dans [7], Deligne a introduit la notion de complexe pur, et démontré la stabilité par image directe par morphismes propres (i.e. la version relative de la conjecture de Weil). Cette théorie, combinée avec celle de faisceaux pervers, a été ensuite développée par Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber[1]: ils ont démontré le théorème de décomposition, et la stabilité des faisceaux pervers purs par images directes intermédiaires (en particulier, la pureté des complexes d'intersection) [loc. cit].

D'après la philosophie de Deligne [6, 7], on a conjecturé qu'il existerait des objets en car. 0, correspondant aux complexes purs, cf. [2,3,4] etc. Le but de cet article est de donner une réponse positive: en utilisant la théorie de $\mathcal{D}$ -Modules filtrés, la théorie de la filtration V [17, 22] et la théorie de faisceaux pervers, on définit la notion de *Module de Hodge polarisable* (cf. 5.1–2), qui doit correspondre à celle de faisceau pervers pur, et on démontre la stabilité par images directes (perverses) par un morphisme projectif avec un théorème de Lefschetz fort relatif et une polarisation induite sur les parties primitives (i.e. une théorie de Hodge-Lefschetz relative), cf. 5.3.1.

Soient X une variété analytique complexe lisse, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels analytiques muni de la filtration F par degré d'opérateur, et $MF(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés. On dit que $(M, F) \in MF(\mathcal{D}_X)$ est holonome, si M est un $\mathcal{D}_X$ -Module holonome [16, 18] et $Gr^F M$ est un $Gr^F \mathcal{D}_X$ -Module cohérent (i.e. F est une bonne filtration de M [loc. cit]). Soit $MF_h(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $MF(\mathcal{D}_X)$ des $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés holonomes. D'après Kashiwara [16] on a le foncteur

$$DR: MF_h(\mathcal{D}_X) \rightarrow \text{Perv}(\mathbf{C}_X) (\subset D_c^b(\mathbf{C}_X))$$

Reçu le 28 janvier, 1988.

* Institute for Advanced Study, Princeton, U.S.A.

RIMS Kyoto University, Kyoto 606, Japan.

** Supporté par Sloan Foundation.

induit par $DR(M, F) = [M \rightarrow \mathcal{Q}_X^1 \otimes M \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{Q}_X^n \otimes M] [n]$, où $n = \dim X$. Ici, pour R un sous-corps de $\mathbf{C}$, $\text{Perv}(R_X)$ est la sous-catégorie pleine de $D_c^b(R_X)$ (la catégorie dérivée des R_X -Modules à cohomologies constructibles) définie par les conditions [1]:

$$\dim \text{supp } \mathcal{H}^i K \leq -i, \quad \dim \text{supp } \mathcal{H}^i DK \leq -i \quad \text{pour } K \in D_c^b(R_X),$$

où D est le foncteur dual de Verdier [32]. D'après [1] $\text{Perv}(R_X)$ est une catégorie abélienne, et DR est exact et fidèle, car DR induit le foncteur exact de catégories triangulées $DR: D_h^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_c^b(\mathbf{C}_X)$, et $M=0$ si $DR(M)=0$ pour un module holonome M .

Soit $i: X \rightarrow Y$ une immersion fermée de variétés analytiques lisses. On a alors le foncteur image directe (cf. [2, 21]):

$$\int_i: MF_h(\mathcal{D}_X) \rightarrow MF_h(\mathcal{D}_Y)$$

tel que $\int_i (M, F) = (\int_i M, F)$ avec $\int_i M = i_*(\mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \otimes \mathcal{D}_X M)$ (cf. [18]), où la filtration F est la convolution de celle de $\mathcal{D}_{Y \leftarrow X} = \mathcal{Q}_X^n \otimes i^{-1} \mathcal{O}_Y i^{-1} (\mathcal{D}_Y \otimes (\mathcal{Q}_Y^n)^{-1})$ et de M , i. e. si on choisit des coordonnées locales $(y_1, \dots, y_m)$ de Y telles que $X = \{y_{n+1} = \dots = y_m = 0\}$, on a

$$\int_i M = i_* M[\partial], \quad F_p \int_i M = \sum_{q+|\nu| \leq p-r} i_* F_q M \otimes \partial^\nu$$

où $\partial = (\partial_{n+1}, \dots, \partial_m)$, $\nu = (\nu_{n+1}, \dots, \nu_m) \in \mathbf{N}^r$ et $r = m - n = \text{codim}_Y X$. On vérifie facilement $DR \circ \int_i = i_* \circ DR$, cf. §2. Ici on utilise les $\mathcal{D}$ -Modules à gauche seulement dans cette introduction. La définition de l'image directe et la vérification de la compatibilité ci-dessus sont plus faciles dans le cas de $\mathcal{D}$ -Modules à droite. Pour la transformation de $\mathcal{D}_X$ -Modules à gauche dans ceux à droite on utilise le foncteur $(\mathcal{Q}_X^n, F) \otimes_{\mathcal{O}_X}$ avec $Gr_p^F \mathcal{Q}_X^n = 0$ pour $p \neq -n$. Le décalage de la filtration F de l'image directe vient de cette transformation.

On définit $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q})$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés holonomes munis de $\mathbf{Q}$ -structure par le produit de $MF_h(\mathcal{D}_X)$ et $\text{Perv}(\mathbf{Q}_X)$ sur $\text{Perv}(\mathbf{C}_X)$, i.e. les objets sont les couples d'objets $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X) \times \text{Perv}(\mathbf{Q}_X)$ munis d'un isomorphisme $\alpha: DR(M, F) \cong \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} K$ dans $\text{Perv}(\mathbf{C}_X)$, et les morphismes sont les couples de morphismes compatibles avec α . Alors on a l'image directe

$$(0.1) \quad i_*: MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q}) \rightarrow MF_h(\mathcal{D}_Y, \mathbf{Q})$$

par $i_*(M, F, K) = (\int_i (M, F), i_* K)$ pour une immersion fermée i comme ci-dessus. On définira $MH(X, w)$ la catégorie des *Modules de Hodge de poids* w

comme une sous-catégorie pleine de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q})$ en utilisant les foncteurs cycles évanescents.

Soit g une fonction holomorphe sur X . On définit l'immersion par graphe $i_g: X \rightarrow X \times \mathbf{C}$ par $i_g(x) = (x, g(x))$. Posons $(\tilde{M}, F) = \int_{i_g} (M, F)$ pour $(M, F) \in MF_h(\mathcal{D}_X)$. Si M est régulier au sens de [18], on a la filtration V sur $\tilde{M}$ dont les gradués associés calculent les cycles évanescents de $DR(M)$, cf. [17]. Si de plus la monodromie T de $\psi_g DR(M)$ est quasi-unipotente, la filtration V est indexée par $\mathbf{Q}$ et on a les isomorphismes canoniques

$$(0.2) \quad DR(\oplus_{-1 < \alpha \leq 0} Gr_V^\alpha \tilde{M}) = \psi_g DR(M)[-1], \quad DR(Gr_V^{-1} \tilde{M}) = \phi_{g,1} DR(M)[-1]$$

tels que $\exp(-2\pi i t \partial_t)$ correspond à la monodromie T , cf. [loc. cit] (voir aussi 3.4.12), où $\phi_{g,1}$ est la partie à monodromie unipotente de ϕ_g (cf. [10] pour la définition de cycles évanescents ψ_g, ϕ_g). Ici V est décroissante et $t\partial_t - \alpha$ est nilpotent sur $Gr_V^\alpha \tilde{M}$, où t est la coordonnée de $\mathbf{C}$. Si les conditions (cf. (3.2.1.2–3)):

$$(0.3) \quad t: F_p V^\alpha \tilde{M} \xrightarrow{\sim} F_p V^{\alpha+1} \tilde{M} \quad \text{pour } \alpha > -1$$

$$(0.4) \quad \partial_t: F_p Gr_V^\alpha \tilde{M} \xrightarrow{\sim} F_{p+1} Gr_V^{\alpha-1} \tilde{M} \quad \text{pour } \alpha < 0$$

sont satisfaites pour $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q})$, on définit les cycles évanescents de (M, F, K) le long de g par:

$$\begin{aligned} \psi_g(M, F, K) &= (\oplus_{-1 < \alpha \leq 0} Gr_V^\alpha(\tilde{M}, F), \quad \psi_g K[-1]) \\ \phi_{g,1}(M, F, K) &= (Gr_V^{-1}(\tilde{M}, F[-1]), \quad \phi_{g,1} K[-1]). \end{aligned}$$

Ici on peut construire les isomorphismes dans (0.2) en utilisant la condition (0.3) et la condition $Gr_V^\alpha(\tilde{M}, F) \in MF_h(\mathcal{D}_X)$ pour $\alpha > -1$, s'il existe la filtration V indexée par $\mathbf{Q}$ et satisfaisant les conditions (3.1.1.1–3), cf. 3.4.12. Mais pour simplifier l'exposé, on suppose que M soit régulier et que la monodromie T soit quasi-unipotente, lorsqu'on dit que (M, F, K) satisfait les conditions (0.3–4), cf. 5.1.18.

On dit que $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q})$ est à *support strict* Z , si $\text{supp } M = Z$, Z est irréductible et M (ou K) n'a ni un sous-objet ni un objet quotient non-trivial dont le support est plus petit que Z . Soit $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q})_Z$ la sous-catégorie pleine de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q})$ des objets à support strict Z ou $\emptyset$. On dit que $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q})$ est *localement décomposable par support strict*, si pour tout ouvert U de X , la restriction de (M, F, K) à U est la somme directe de $(M_Z, F, K_Z) \in MF_h(\mathcal{D}_U, \mathbf{Q})_Z$ pour Z les sous-variétés fermées irréductibles de U ,

où (M_Z, F, K_Z) sera dit la Z -composante de $(M, F, K)|_U$. Cette propriété est de nature locale, car la décomposition est unique. Si (M, F, K) satisfait les conditions (0.3–4), (M, F, K) est localement décomposable par support strict, si on a

$$(0.5) \quad Gr_{\bar{V}}^{-1}(\tilde{M}, F) = \text{Im can} \oplus \text{Ker Var} \quad \text{dans} \quad MF(\mathcal{D}_U)$$

pour toute g définie sur un ouvert U de X , où $\text{can}: Gr_V^0(M, F[1]) \rightarrow Gr_{\bar{V}}^{-1}(M, F)$ et $\text{Var}: Gr_{\bar{V}}^{-1}(M, F) \rightarrow Gr_V^0(M, F)$ sont définis par $-\partial_i$ et t , cf. 5.1.4–5.

Soit $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})_{l\acute{e}ss}$ la sous-catégorie pleine de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})$ des objets satisfaisant les conditions (0.3–5) pour toute g localement définie. Alors $MH(X, w)$ est la plus grande sous-catégorie pleine de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})_{l\acute{e}ss}$ satisfaisant les conditions (cf. 5.1.6):

(0.6) Si $\text{supp}(M, F, K) = \{x\}$, il existe $(H_{\mathcal{C}}, F, H_{\mathcal{Q}})$ une $\mathbb{Q}$ -structure de Hodge de poids w telle que $(M, F, K) = (i_x)_*(H_{\mathcal{C}}, F, H_{\mathcal{Q}})$, où $i_x: \{x\} \rightarrow X$ et $F_p = F^{-p}$ sur $H_{\mathcal{C}}$ de sorte que $(H_{\mathcal{C}}, F) \in MF_h(\mathcal{D}_{\{x\}})$.

(0.7) Pour toute g définie sur un ouvert U de X et pour toute sous-variété fermée irréductible Z de U telle que $g^{-1}(0) \ni Z$, on a $Gr_{i-w+1}^W \psi_g(M_Z, F, K_Z)$, $Gr_{i-w}^W \phi_{g,1}(M_Z, F, K_Z) \in MH(U, i)$, où (M_Z, F, K_Z) est la Z -composante de $(M, F, K)|_U$.

Ici, W est la filtration de monodromie, i.e. $N(W_i) \subset W_{i-2}$ et $N^j: Gr_j^W \xrightarrow{\sim} Gr_{-j}^W$ ($j > 0$), cf. [7], où N est définie par $-(t\partial_i - \alpha)$ sur $Gr_V^0 \tilde{M}$ et par $(2\pi i)^{-1} \otimes \log T_u$ sur $\psi_g K$ et $\phi_{g,1} K$ avec $T = T_u T_s$ la décomposition de Jordan de la monodromie. Notons que ces conditions sont bien-définies par récurrence sur la dimension du support, et qu'elles sont locales. Posons $MH_Z(X, w) = MH(X, w) \cap MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})_Z$. On a alors la décomposition localement finie

$$MH(X, w) = \bigoplus_Z MH_Z(X, w).$$

Une polarisation de $(M, F, K) \in MH(X, w)$ est un accouplement $S: K \otimes K \rightarrow a_X^! \mathbb{Q}(-w)$ ($= \mathbb{Q}_X(n-w)[2n]$) satisfaisant les conditions (cf. 5.2.10):

(0.8) Si $\text{supp } M = \{x\}$, il existe une polarisation S' de $(H_{\mathcal{C}}, F, H_{\mathcal{Q}})$ au sens de [6] telle que $S = (i_x)_* S'$, où i_x et $(H_{\mathcal{C}}, F, H_{\mathcal{Q}})$ sont comme dans la condition (0.6).

(0.9) S est compatible avec la filtration de Hodge F , i.e. le morphisme $K \rightarrow (\mathcal{D}K)(-w)$ correspondant à S se prolonge en un morphisme $(M, F, K) \rightarrow \mathcal{D}(M, F, K)(-w)$ de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})$.

(0.10) Pour toute g et Z comme dans (0.7), l'accouplement induit $Gr^{W,p} \psi_g S \circ$

$(id \otimes N^i): P_N Gr_i^W \psi_g K_Z[-1] \otimes P_N Gr_i^W \psi_g K_Z[-1] \rightarrow a_V^1 \mathbf{Q}(1-w-i)$ est une polarisation de la partie primitive $P_N Gr_i^W \psi_g(M_Z, F, K_Z)$,

cf. 5.2.3 pour la définition de ${}^p\psi_g S$, où les conditions sont encore par récurrence sur la dimension du support. Ici $\mathbf{D}(M, F, K) = (\mathbf{D}(M, F), \mathbf{D}K)$ est définie par la compatibilité du foncteur dual analytique et topologique, cf. 2.4.12 et 2.4.15 (voir aussi [18, 23]), et $\mathbf{D}(M, F)$ appartient à $MF_h(\mathcal{D}_X)$, i.e. la filtration F de $\mathbf{D}(M, F)$ est strictement compatible à la différentielle du complexe, si $Gr^F M$ est un $Gr^F \mathcal{D}_X$ -Module de Cohen-Macaulay. Mais la dernière condition est satisfaite pour les Modules de Hodge, cf. 5.1.13. Noton qu'une polarisation est compatible à la décomposition par support strict, i.e. $S = \bigoplus S_Z$ avec S_Z une polarisation de la Z -composante, car $\text{Hom}(K_Z, K_{Z'}) = 0$ pour $Z \neq Z'$. On dit qu'un Module de Hodge est *polarisable*, s'il a une polarisation. On notera $MH(X, w)^p$ (resp. $MH_Z(X, w)^p$) la sous-catégorie pleine de $MH(X, w)$ (resp. $MH_Z(X, w)$) des Modules de Hodge polarisables.

Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre de variétés analytiques lisses, et $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{Q})$. Soient $i: X \rightarrow X \times Y$ la immersion par graphe de f , et $p: X \times Y \rightarrow Y$ la projection. On définit l'image directe $f_*(M, F, K) = (\int_f (M, F), f_* K)$ par $\int_f (M, F) = R p_* DR_{X \times Y/Y}(\tilde{M}, F)$ avec $(\tilde{M}, F) = (\int_i (M, F), F)$ et

$$F_i DR_{X \times Y/Y} \tilde{M} = [F_i \tilde{M} \rightarrow \mathcal{Q}_X^1 \otimes F_{i+1} \tilde{M} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{Q}_X^n \otimes F_{i+n} \tilde{M}] [n],$$

cf. [2, 21] (voir aussi [6, 36] pour le cas $Y = pt$). On vérifie facilement $DR \circ \int_f = f_* \circ DR$, cf. §2 pour la définition de l'image directe plus intrinsèque en utilisant les Modules induits. Si $\int_f (M, F)$ est *strict*, i.e. la différentielle du complexe est strictement compatible à la filtration F , on définit

$$\mathcal{H}^j f_*(M, F, K) = (\mathcal{H}^j \int_f (M, F), {}^p\mathcal{H}^j f_* K) \in MF_h(\mathcal{D}_Y, \mathbf{Q})$$

car $DR \circ \mathcal{H}^j = {}^p\mathcal{H}^j \circ DR$, où ${}^p\mathcal{H}^j$ est le foncteur cohomologie perverse, cf. [1]. Le théorème principal de cet article est (cf. 5.3.1):

Théorème 1. *Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme projectif de variétés analytiques lisses, et $(M, F, K) \in MH(X, w)$ muni d'une polarisation S . Alors*

- i) $\int_f (M, F)$ est strict, et $\mathcal{H}^j f_*(M, F, K) \in MH(Y, w+j)^p$.
- ii) $l^j: \mathcal{H}^{-j} f_*(M, F, K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^j f_*(M, F, K)(j)$ pour $j > 0$.
- iii) $(-1)^{j(j-i)/2} {}^p\mathcal{H} f_* S \circ (id \otimes l^j): P_l {}^p\mathcal{H}^{-j} f_* K \otimes P_l {}^p\mathcal{H}^{-j} f_* K \rightarrow a_V^1 \mathbf{Q}(j-w)$ est une polarisation de la partie l -primitive $P_l \mathcal{H}^{-j} f_*(M, F, K)$ pour $j \geq 0$.

Dans ii), (j) est le twist de Tate pour $j \in \mathbb{Z}$, i.e. $(M, F)(j) = (M, F[j])$ avec $F[j]_p = F_{p-j}$, cf. (2.0.2), et l est la première classe de Chern d'un faisceau inversible f -ample. Pour la démonstration du théorème 1, on vérifie d'abord

Lemme 1. $(M, F, K) \in MH_Z(X, w)$ (resp. $MH_Z(X, w)^p$) est génériquement (sur Z) une variation de $\mathbb{Q}$ -structure de Hodge (resp. $\mathbb{Q}$ -structure de Hodge polarisable) de poids $w - \dim Z$.

En effet, cela résulte des deux lemmes suivants (cf. 5.1.8–10, 5.2.11–12):

Lemme 2. $MH_Z(X, w)$ (resp. $MH_Z(X, w)^p$) ne dépend que de Z , i.e. elle est indépendante de l'immersion de Z dans une variété lisse X .

Lemme 3. $(M, F, K) \in MH_X(X, w)$ est une variation de $\mathbb{Q}$ -structures de Hodge de poids $w - \dim X$, si $K[-\dim X]$ est un système local sur X . De plus une polarisation de (M, F, K) est une polarisation de la variation (au sens de [6]).

Ici on a utilisé aussi

Lemme 4. Pour $(M, F, K) \in MH_Z(X, w)$, K est un complexe d'intersection $\mathcal{J}C_Z L$ pour L un système local défini sur un ouvert de Zariski lisse U de Z .

La dernière assertion résulte immédiatement de la définition de support strict. Puisque les cycles évanescents d'un Module de Hodge sont 'mixtes' (i.e. Gr_i^W sont purs), il faut traiter un peu le cas mixte.

Une filtration W de $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})$ est un couple de filtrations sur M et K compatibles avec l'isomorphisme α . Soit $MF_h W(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})$ la catégorie des objets de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})$ munis d'une filtration croissante W localement finie sur X . Soit $MHW(X)$ (resp. $MHW(X)^p$) la sous-catégorie pleine de $MF_h W(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})$ définie par la condition:

$$Gr_i^W(M, F, K) \in MH(X, i) \text{ (resp. } MH(X, i)^p) \text{ pour tout } i,$$

i.e. les objets de $MHW(X)$ (resp. $MHW(X)^p$) sont les extensions (arbitraires) des objets de $MH(X, i)$ (resp. $MH(X, i)^p$), et ils sont appelés les *Modules de Hodge W -filtrés* (resp. *Modules de Hodge polarisables W -filtrés*). On démontre par récurrence sur la dimension du support (cf. 5.1.14, 5.2.13):

Lemme 5. $MH_Z(X, w)$, $MH(X, w)$, $MHW(X)$, $MH_Z(X, w)^p$, $MH(X, w)^p$ et $MHW(X)^p$ sont des catégories abéliennes dont les morphismes sont strictement compatibles avec F (et strictement bi-compatibles avec F, W dans le cas de $MHW(X)$ et $MHW(X)^p$, cf. 1.1.15, 1.2.2, 1.2.6 pour la définition de morphisme bi- (ou I -) strict), et $MH_Z(X, w)^p$ et $MH(X, w)^p$ sont semi-simples.

On définit le twist de Tate par

$$(M, F, K; W)(j) = (M, F[j], K(j); W[-2j]), \text{ cf. (2.0.2).}$$

Soit $(M, F, K; W)$ un Module de Hodge W -filtré muni d'un morphisme

$$N: (M, F, K; W) \rightarrow (M, F, K; W)(-1)$$

et un accouplement $S: K \otimes K \rightarrow a_X^! \mathcal{Q}(-w) = \mathcal{Q}_X(\dim X - w)[2 \dim X]$ tel que

$$S(id \otimes N) + S(N \otimes id) = 0,$$

$$N^j: Gr_{w+j}^W(M, F, K) \xrightarrow{\sim} Gr_{w-j}^W(M, F, K)(-j) \quad \text{pour } j > 0,$$

et que $Gr^W S \circ (id \otimes N^j): P_N Gr_{w+j}^W K \otimes P_N Gr_{w+j}^W K \rightarrow a_X^! \mathcal{Q}(-w-j)$ est une polarisation de la partie N -primitive $P_N Gr_{w+j}^W(M, F, K) (= \text{Ker } N^{j+1})$ pour $j \geq 0$. On dit que $(M, F, K; W)$ est *fortement polarisé par S, N avec poids w* , si les conditions ci-dessus sont satisfaites. On démontre le théorème 1 et la proposition 1 ci-dessous par récurrence sur la dimension du support.

Proposition 1. Soient $f: X \rightarrow Y$ comme dans le théorème 1, et $(M, F, K; W)$ un Module de Hodge W -filtré fortement polarisé par N, S avec poids w . Alors

- i) $\int_f (M, F)$ est strict et $(\mathcal{H}^j f_*(M, F, K), W[j]) \in MHW(Y)^b$
- ii) $l^j: (\mathcal{H}^{-j} f_*(M, F, K), W[-j]) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{H}^j f_*(M, F, K), W[j])(j)$ pour $j > 0$.
- iii) La partie l -primitive $(P_l \mathcal{H}^{-j} f_*(M, F, K), W[-j])$ est fortement polarisée par $N, (-1)^{j(j-1)/2} \mathcal{H}^j f_* S \circ (id \otimes l^j)$ avec poids $w-j$ pour $j \geq 0$.

Ici W sur $\int_f M, f_* K$ n'est pas strict; la filtration W sur $\mathcal{H}^j \int_f M, {}^b \mathcal{H}^j f_* K$ est définie par l'image de $\mathcal{H}^j \int_f W_b M$ dans $\mathcal{H}^j \int_f M$, etc.

D'après le lemme 1 et le théorème 1, la preuve de la proposition 1 est réduite à un lemme de structure de Hodge bi-graduée polarisée (cf. 5.3.6) en utilisant la suite spectrale:

$$E_1^{p,q} = \mathcal{H}^{p+q} f_* Gr_{-p}^W(M, F, K) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q} f_*(M, F, K)$$

qui dégénère en E_2 , cf. 5.3.5.

Pour la preuve du théorème 1 on peut supposer que $(M, F, K) \in MH_Z(X, w)$. Si $\dim f(Z) \neq 0$, on prend toutes les fonctions g localement définies sur Y telles que $f^{-1} g^{-1}(0)$ ne contient pas Z . On applique la proposition 1 à $(\psi_{gf}(M, F, K), W), (\phi_{gf,1}(M, F, K), W)$, et on utilise 3.3.17, cf. 5.3.4. Si $\dim f(Z) = 0$, on peut supposer que $X = \mathbf{P}^m, Y = pt$ d'après le lemme 2, et on prend un pinceau de Lefschetz en sorte que l'assertion est réduite au cas où f se factorise par un morphisme plat $X \rightarrow \mathbf{P}^1$. Alors on applique le même argument

que ci-dessus à $X \rightarrow \mathbf{P}^1$, et un résultat de Zucker [36] à $\mathbf{P}^1 \rightarrow pt$ pour démontrer l'assertion i). Pour ii) et iii) on utilise le théorème de Lefschetz faible (cf. [1]; voir aussi 2.1.18) et aussi le pinceau de Lefschetz ci-dessus, cf. 5.3.8.

Pour appliquer le théorème 1, il faut démontrer une réciproque du lemme 3 (cf. 5.4.3):

Théorème 2. *Une variation de $\mathbb{Q}$ -structure de Hodge polarisée de poids w sur une variété lisse X est un Module de Hodge polarisé de poids $w + \dim X$.*

Pour la démonstration il faut vérifier les conditions (0.3–5), (0.7) et (0.10) pour toutes les fonctions holomorphes localement définies sur X . D'après Hironaka [13] on a une désingularisation de g (car X est locale), et on se ramène au cas où $g^{-1}(0)$ est à croisements normaux (et à multiplicité constante) par le même argument que dans la preuve du théorème 1 dans le cas $\dim f(Z) \neq 0$. Alors on peut vérifier les assertions directement, où on utilise les trois filtrations compatibles (cf. 1.1.13) pour calculer les cycles évanescents, cf. 3.6.9.

Soit Z une variété analytique irréductible. Alors on peut définir $MH_Z(w)$ (resp. $MH_Z(w)^b$) la catégorie des *Modules de Hodge* (resp. *Modules de Hodge polarisables*) de poids w à support strict Z en utilisant les immersions locales de X dans des variétés lisses d'après le lemme 2 (et 3.2.6), cf. 2.1.20, 5.3.12. On dit qu'une variation de structures de Hodge sur une variété lisse est *géométrique*, si elle est un facteur direct de l'image directe par un morphisme projectif lisse d'une variation de structures de Hodge dont le système local sous-jacent est constant de rang un, i.e. chaque fibre de la variation est le facteur direct de la cohomologie du fibre du morphisme au twist de Tate près. On dit qu'une variation géométrique sur un ouvert de Zariski lisse U d'une variété analytique irréductible Z est *prolongeable* rel. à Z , si le morphisme projectif lisse ci-dessus sur U se prolonge en un morphisme projectif sur Z . On dit qu'une variation géométrique est *algébriquement géométrique*, si la variété et le morphisme projectif lisse ci-dessus sont algébrique. Notons qu'une variation algébriquement géométrique est prolongeable pour toutes les compactifications (partielles) algébriques d'après Nagata, Chow et Hironaka. Comme corollaire des théorèmes 1 et 2, on obtient:

Corollaire 1. *Si une variation de structures de Hodge géométrique définie sur un ouvert de Zariski lisse U d'une variété analytique irréductible Z est prolongeable rel. à Z , elle se prolonge canoniquement en un Module de Hodge polarisable à support strict Z . En particulier il existe uniquement un Module de Hodge polarisable à support strict Z de poids $\dim Z$, dont le système local sous-jacent*

est le complexe d'intersection $\mathcal{IC}_Z \mathbf{Q}$.

Alors le théorème 1 implique:

Corollaire 2. *Pour une variété projective irréductible Z et un système local L sous-jacent à une variation de structures de Hodge algébriquement géométrique définie sur un ouvert de Zariski lisse de Z (e.g. $L = \mathbf{Q}_U$), il existe canoniquement une structure de Hodge pure polarisable sur la cohomologie d'intersection $IH^*(Z, L) = H^*(Z, \mathcal{IC}_Z L)$.*

Corollaire 3. *Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme projectif de variétés analytiques irréductibles, et L un système local sous-jacent à une variation de structures de Hodge géométrique sur un ouvert de Zariski de X . Si la variation géométrique est prolongeable rel à X , on a le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber pour $f_* \mathcal{IC}_X L$ l'image directe du complexe d'intersection à coefficient L , i.e.*

$$(0.11) \quad f_* \mathcal{IC}_X L \cong \bigoplus_j {}^p \mathcal{H}^j f_* \mathcal{IC}_X L [-j] \quad \text{dans} \quad D_c^b(\mathbf{Q}_Y),$$

$$(0.12) \quad {}^p \mathcal{H}^j f_* \mathcal{IC}_X L = \bigoplus_{Z'} \mathcal{IC}_{Z'} L_{Z'}^j \quad \text{dans} \quad \text{Perv}(\mathbf{Q}_Y),$$

où les Z' sont les sous-variétés fermées irréductibles de Y et les $L_{Z'}^j$ sont des systèmes locaux sur des ouverts de Zariski lisses de Z' , cf. [1] pour le cas algébrique.

En effet, on a (0.11) d'après l'assertion ii) du théorème 1 et [8], et (0.12) d'après l'assertion i) du théorème 1 et le lemme 4. Notons que les systèmes locaux $L_{Z'}^j$ sont semi-simples d'après [6] dans le cas algébrique.

Conjecture 1. Les corollaires ci-dessus restent valables (sans condition de prolongeabilité), si on remplace la condition “géométrique” par “polarisable”.

Cette conjecture sera démontrée dans l'article suivant. En effet elle résulte de l'équivalence de catégories:

$$\text{Conjecture 2.} \quad MH_Z(w + \dim Z)^p \cong VSH_{\text{gén}}(Z, w)^p.$$

Ici le terme à droite est la catégorie des variations de $\mathbf{Q}$ -structures de Hodge polarisables sur des ouverts de Zariski lisses de Z dont les monodromies locales sont quasi-unipotentes. Notons que la conjecture 2 est équivalente à la stabilité des Modules de Hodge polarisables par image directe intermédiaire par un morphisme ouvert tel que l'image directe du faisceau pervers sous-jacent par ce morphisme est à cohomologies constructibles.

La motivation originale de ce travail était de généraliser la démonstration

analytique du théorème de décomposition (0.11–12) dans le cas $\dim Y=1$ et $\mathcal{IC}_X L = \mathbb{Q}_X$, où X, Y sont lisses, cf. [26, 27]. Notons que la proposition 4.2.2 corrige la preuve de Steenbrink du théorème 5.9 dans [29], cf. 4.2.5. Par définition les Modules de Hodge polarisables sont stables par les foncteurs cycles évanescents gradués $Gr^W \psi_g, Gr^W \phi_{g,1}$. Cette stabilité pour $(\mathcal{O}_X, F, \mathbb{Q}_X[\dim X])$ est une généralisation d'un résultat de Varchenko [35] au cas singularités non-isolées, cf. [28, (4.1)]. Notons que la motivation originale de [26,27] était de donner une démonstration (et formule) naturelle du résultat de Varchenko.

Dans [2], Brylinski a proposé une autre définition de filtration de Hodge sur un $\mathcal{D}$ -Module holonome régulier correspondant à un complexe d'intersection qui est génériquement sous-jacent à une variation de structures de Hodge polarisable, en utilisant l'ordre de Kashiwara-Kawai [18], cf. 5.4.9. Malheureusement il n'y a pas de méthode qui la relie à la théorie de Hodge classique sauf le cas où les singularité de la variation sont à croisements normaux, ni de stabilité de l'ordre de Kashiwara-Kawai par un morphisme projectif. Notons que, dans la théorie de Hodge, l'usage de $\mathcal{D}$ -Modules filtrés remonte à Deligne: la généralisation d'un résultat de Griffiths sur l'intégral des formes rationnelles (i.e. la filtration de Hodge d'une variété ouverte est donnée par l'ordre de pôle de formes différentielles rationnelles, cf. [6, (3.1.11)]), car

$$R\Gamma(X, (j_* \mathcal{O}_{X^*}, F))[\dim X] = \int_{X \rightarrow pt} (\mathcal{O}_X(*Y), F)$$

par définition, où X est une variété complexe lisse propre et $Y=X \setminus X^*$ est une hypersurface à croisements normaux. Une raison par laquelle $\mathcal{D}$ -Modules filtrés sont essentiels, est qu'on obtient des complexes des $\mathcal{D}$ -Modules filtrés avec une filtration stricte, et que ceci exprime des analogues relatifs de la dégénérescence de la suite spectrale: Hodge $\Rightarrow$ De Rham.

Dans cet article on n'utilise pas la notion de $\mathcal{D}$ -Module holonome *régulier*; ceci pour répondre une question de Mebkhout. On peut, si on veut, supposer que tous les $\mathcal{D}$ -Modules holonomes considérés dans cet article sont réguliers, car on peut démontrer que les conditions imposées aux Modules de Hodge entraînent leur régularité, cf. 5.1.18.

Le plan de cet article est comme suit:

En §1 on résout le problème de trois (ou plusieurs) filtrations, présenté dans [6]. On définit la notion de filtrations compatibles, celle de complexe (ou morphisme) strict, et on donne quelques critères, cf. 1.2.9, 1.2.12.

Pour deux sous-objets A_1, A_2 d'un objet A d'une catégorie abélienne (e.g. la catégorie des espaces vectoriels), il existe toujours un diagramme carré de

suites exactes courtes $C^{i,j}$ tel que $C^{-1,0}=A_1$, $C^{0,-1}=A_2$ et $C^{0,0}=A$ d'après le lemme des neuf (ou le lemme de Zassenhaus [loc. cit]). C'est pourquoi on n'a pas de problème pour deux filtrations. Mais pour trois sous-objets A_i ($i=1, 2, 3$), un tel diagramme cubique n'existe plus en général (e.g. $A=\mathbf{R}^2$, $\dim A_j=1$ et la position de A_j est générique, i.e. $A_i \neq A_j$ pour $i \neq j$). On dit que trois filtrations F_j ($j=1, 2, 3$) sont compatibles, si le diagramme cubique ci-dessus existe pour tous F_1^p, F_2^q, F_3^r ($p, q, r \in \mathbf{Z}$). Dans ce cas on peut vérifier que $Gr_{F_1}^p Gr_{F_2}^q Gr_{F_3}^r$ ne dépend pas de l'ordre de filtrations. Les résultats principaux de ce paragraphe sont les théorèmes 1.2.9 et 1.2.12 qui donnent des critères par récurrence pour que des filtrations soient compatibles et qu'un complexe multi-filtré soit strict. En 1.3 on interprète les résultats de 1.1–2 du point de vue de la catégorie exacte au sens de Quillen [24]. On donne aussi un formalisme de la filtration décalée (cf. [6]) et de la filtration de monodromie (cf. [7]) dans la catégorie exacte. Ces résultats seront utilisés pour étudier le cas mixte dans l'article suivant.

En §2, on donne quelque formalisme de $\mathcal{D}$ -Modules filtrés, i.e. la définition d'image directe et de dual, la dualité pour un morphisme propre avec la compatibilité de la dualité analytique et topologique par le foncteur DR . Le point clé est l'usage systématique de Modules induits sur $(\mathcal{O}, \mathcal{D})$, i.e. de la forme $(L, F) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{D}, F)$ pour un $\mathcal{O}$ -Module filtré (L, F) , et l'introduction de complexes filtrés différentiels; ce qui simplifie considérablement les définitions ci-dessus et les vérifications des propriétés fonctorielles. Ici on utilise les $\mathcal{D}$ -Modules à droite car c'est plus commode pour les images directes, pour la dualité et pour le foncteur DR^{-1} qui associe un complexe de $\mathcal{D}$ -Modules filtrés à un complexe filtré différentiel. Les lemmes clés sont 2.2.2 et 2.4.2.

En §3, on donne un formalisme de la filtration V (comparer à [17] [22]). En 3.2 on introduit la notion de compatibilité entre la filtration de Hodge F et la filtration V , et on démontre que la filtration F est déterminée par sa restriction au complément d'un diviseur dans quelque cas, cf. 3.2.2–3. En 3.3 on définit l'image directe d'un $\mathcal{D}$ -Module muni des filtrations F et V par un morphisme propre. On démontre que l'image directe est bi-strict au sens de §1, et que l'image directe de la filtration V induit la filtration V sur les cohomologies de l'image directe, si l'image directe de $Gr_\alpha^V(M, F)$ est strict pour tout α , cf. 3.3.17. En 3.4 on construit un isomorphisme fonctoriel entre $DR Gr^V$ et $\psi DR, \phi_1 DR$, en généralisant la construction de Katz (voir [29]) et de Malgouyres [22], où on utilise un résultat récent de Kashiwara-Schapira [19] (voir aussi [15]) pour démontrer la finitude de l'image directe par un morphisme

non-propre associé à une fibration de Milnor, cf. 3.4.9. En 3.5, on définit les morphismes de restriction et de Gysin pour les $\mathcal{D}$ -Modules filtrés holonomes dans le cas non-caractéristique de codimension un. On calcule aussi les cycles évanescents dans quelque cas; ceci est utilisé dans la preuve de 5.3.1, cf. 5.3.8. En 3.6, on calcule les cycles évanescents $\psi_g(\mathcal{O}, F)$ dans le cas où $g^{-1}(0)$ est à croisements normaux et à multiplicité constante; ceci est utilisé dans la preuve de 5.4.3.

En §4, on démontre le lemme clé (cf. 4.2.2) pour le passage de E_1 à E_2 de la suite spectrale associée à W (cf. 5.3.5 et la proposition 1 dans cette introduction). Une nouvelle et simple démonstration de 4.2.2 avec les signes exacts a été obtenue par Deligne, cf. [11].

En §5, on définit les Modules de Hodge polarisables (cf. 5.1–2), et on démontre les théorèmes principaux et leurs corollaires. Les points clés sont 5.1.14 (cf. lemme 5), 5.2.14 et 5.3.4 (cf. proposition 1 avec 3.3.17). On démontre aussi que $Gr^F M$ est de Cohen-Macaulay pour (M, F, K) un Module de Hodge, cf. 5.1.13, et on définit les accouplements ${}^p\psi_g S$, ${}^p\phi_{g,1} S$ induits par le foncteur cycle évanescant, cf. 5.2.3. En 5.2.17–21, on donne un formalisme de suite spectrale associée à un objet quasi-filtré (ou spectral) qui a été peut-être connu par Verdier, cf. [1].

Je remercie P. Deligne, M. Kashiwara et B. Malgrange pour leurs mathématiques (et philosophies) qui m'ont introduit à ce sujet, et pour les conversations avec eux, qui m'ont donné une orientation correcte pour résoudre les difficultés techniques. Ce travail a été fait pendant mon séjour à l'Institut Fourier (CNRS), l'Université de Leiden (ZWO), l'IHES, ETH-Zürich, l'Université de Nice (CNRS), MPI Bonn et IAS Princeton. Je remercie les membres de ces instituts pour hospitalité.

Convention. On définit le décalage de filtration pour $n \in \mathbb{Z}$ par

$$(F[n])^i = F^{i+n}, \quad (F[n])_i = F_{i-n}$$

en sorte que ces définitions soient compatibles avec la convention usuelle: $F^i = F_{-i}$.

§1. I -filtrations compatibles et morphismes I -stricts

1.1. I -filtrations compatibles

1.2. Catégories dérivées et morphismes stricts

1.3. Complément

§2. $\mathcal{D}$ -Modules filtrés

- 2.1. $\mathcal{D}$ -Modules filtrés et $\mathcal{B}$ -Modules gradués
- 2.2. Foncteur de de Rham et complexes filtrés différentiels
- 2.3. Foncteur image directe
- 2.4. Foncteur dual
- 2.5. Dualité pour un morphisme propre
- §3. Filtration de Malgrange-Kashiwara et cycles évanescents
 - 3.1. Filtration rationnelle de Malgrange-Kashiwara
 - 3.2. Compatibilité avec la filtration F
 - 3.3. Catégories dérivées et images directes
 - 3.4. Cycles évanescents
 - 3.5. Le cas non-caractéristique
 - 3.6. Le cas croisements normaux
- §4. Structures de Hodge graduées
 - 4.1. Structures de Hodge graduées polarisées
 - 4.2. Structures de Hodge bi-graduées polarisées
- §5. Modules de Hodge polarisables
 - 5.1. Modules de Hodge
 - 5.2. Polarisation
 - 5.3. Stabilité par image directe par un morphisme projectif
 - 5.4. Variations de structures de Hodge polarisables

§1. I -filtrations compatibles et morphismes I -stricts

Soient I un ensemble fini (non vide) et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

1.1. I -filtrations compatibles

1.1.1. Définition. Soit $C^I(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes I^{uple} naifs (cf. [9]). On dit que un objet K de $C^I(\mathcal{A})$ est court si $K^\nu = 0$ pour les éléments ν de $\mathbf{Z}^I$ tels que $\max_{i \in I} |\nu(i)| > 1$, et exact si $K^{\nu-1_i} \xrightarrow{d_i} K^\nu \xrightarrow{d_i} K^{\nu+1_i}$ est exact pour tout ν de $\mathbf{Z}^I$ et pour tout i de I .

On notera $C_{ec}^I(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $C^I(\mathcal{A})$ des complexes exacts courts.

1.1.2. Remarques.

- (1) $C_{ec}^I(\mathcal{A}^\circ) = C_{ec}^I(\mathcal{A})^\circ$
- (2) $C_{ec}^I(\mathcal{A})$ est stable par extensions dans $C^I(\mathcal{A})$, donc c'est une catégorie exacte dans la catégorie abélienne $C^I(\mathcal{A})$. (Pour la définition de catégorie exacte, voir [21], [24].)

1.1.3. Définition. Soit 2^I la catégorie des sous-ensembles de I , dont les morphismes sont les inclusions naturelles, soit $S_I(\mathcal{A})$ (resp. $\check{S}_I(\mathcal{A})$) la catégorie des foncteurs contravariants (resp. covariants) de 2^I dans $\mathcal{A}$.

On définit un foncteur S (resp. $\check{S}$) de $C^I(\mathcal{A})$ dans $S_I(\mathcal{A})$ (resp. $\check{S}_I(\mathcal{A})$) par

$$S(K)_J \text{ (resp. } \check{S}(K)_J) = K^\nu \text{ pour } K = \{K^\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}^I} \in C^I(\mathcal{A})$$

où $J \in 2^I$ et $\nu \in \mathbb{Z}^I$ satisfont la relation :

$$\nu(i) = -1 \text{ (resp. } 1) \text{ si } i \in J, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Soit $\overset{(\nu)}{S}_I^e(\mathcal{A})$ l'image essentielle du foncteur $\overset{(\nu)}{S}: C_{ec}^I(\mathcal{A}) \rightarrow \overset{(\nu)}{S}(\mathcal{A})$, i.e. $\overset{(\nu)}{S}_I^e(\mathcal{A})$ est la sous-catégorie pleine de $\overset{(\nu)}{S}(\mathcal{A})$ définie par :

$$E \in \overset{(\nu)}{S}_I^e(\mathcal{A}) \text{ ssi } E \simeq \overset{(\nu)}{S}(K) \text{ pour } K \in C_{ec}^I(\mathcal{A}).$$

Désormais le symbole $\overset{(\nu)}{S}$ signifie qu'il y a deux énoncés l'un pour S , $S_I^e(\mathcal{A})$, etc. et l'autre pour $\check{S}$, $\check{S}_I^e(\mathcal{A})$, etc.

Un objet de $S_I^e(\mathcal{A})$ (resp. $\check{S}_I^e(\mathcal{A})$) sera dit un *système compatible de sous-objets* (resp. *d'objets quotients*).

1.1.4. Remarque. $S_I(\mathcal{A}^\circ) = \check{S}_I(\mathcal{A})^\circ$, $S_I^e(\mathcal{A}^\circ) = \check{S}_I^e(\mathcal{A})^\circ$.

1.1.5. Proposition. Le foncteur $\overset{(\nu)}{S}: C_{ec}^I(\mathcal{A}) \rightarrow \overset{(\nu)}{S}(\mathcal{A})$ est une équivalence de catégories ; une suite

$$(1.1.5.1) \quad 0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

dans $C_{ec}^I(\mathcal{A})$ est exacte dans la catégorie exacte $C_{ec}^I(\mathcal{A})$, ssi l'image de (1.1.5.1) par $\overset{(\nu)}{S}$ est exacte dans la catégorie abélienne $\overset{(\nu)}{S}_I(\mathcal{A})$.

Preuve. On procède par récurrence sur $|I|$. Si $|I|=1$, l'assertion résulte du "lemme des 9". Si $|I|>1$, on a $I=I' \cup \{*\}$ et la catégorie $S_I(\mathcal{A})$ est équivalente à la catégorie des morphismes de $S_{I'}(\mathcal{A})$, donc, pour $E^1, E^2 \in C_{ec}^I(\mathcal{A})$, un morphisme $f: S(E^1) \rightarrow S(E^2)$ dans $S_I(\mathcal{A})$ correspond à un diagramme de $S_{I'}^e(\mathcal{A})$:

$$(1.1.5.2) \quad \begin{array}{ccc} F_{-1}^1 & \xrightarrow{a_1} & F_0^1 \\ f_{-1} \downarrow & & \downarrow f_0 \\ F_{-1}^2 & \xrightarrow{a_2} & F_0^2 \end{array}$$

où $S(E^i)$ correspond à $[a_i: F_{-1}^i \rightarrow F_0^i] \in \text{Mor}(S_{I'}^e(\mathcal{A}))$. Par hypothèse de récurrence, le diagramme (1.1.5.2) équivaut au diagramme de $C_{ec}^{I'}(\mathcal{A})$:

$$(1.1.5.3) \quad \begin{array}{ccc} E_{-1}^1 & \xrightarrow{d_*} & E_0^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{-1}^2 & \xrightarrow{d_*} & E_0^2 \end{array}$$

où $E_j^i \in C_{*e}^{I'}(\mathcal{A})$ est défini par $(E_j^i)^\mu = (E^i)^\nu$ pour $\mu \in \mathbf{Z}^{I'}$, $\nu \in \mathbf{Z}^I$ tels que $\mu = \nu|_{I'}$, $\nu(*) = j$. Puisque $d_*: E_{-1}^i \rightarrow E_0^i$ est strictement injectif par la définition de F_j^i , E_j^i , le diagramme (1.1.5.3) se prolonge en un diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E_{-1}^1 & \rightarrow & E_0^1 & \rightarrow & E_1^1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & E_{-1}^2 & \rightarrow & E_0^2 & \rightarrow & E_1^2 \rightarrow 0. \end{array}$$

Un tel diagramme équivaut à se donner $g: E^1 \rightarrow E^2$ tel que $S(g) = f$; d'où la première assertion. La deuxième assertion résulte du "lemme des 9". Même démonstration pour $\check{S}$.

1.1.6. Corollaire. $\check{S}_I^{(\vee)}(\mathcal{A})$ est une catégorie exacte, dont une suite est exacte ssi elle l'est dans $\check{S}_I^{(\vee)}(\mathcal{A})$.

C'est clair.

1.1.7. Remarque. Pour $\phi \in \text{Mor } C_{*e}^I(\mathcal{A})$, ϕ est un monomorphisme dans la catégorie abélienne $C^I(\mathcal{A})$ ssi ϕ est un monomorphisme strict dans la catégorie exacte $C_{*e}^I(\mathcal{A})$. Mais $\phi \in \text{Mor } S_I^e(\mathcal{A})$ n'est pas nécessairement un monomorphisme strict dans la catégorie exacte, même si c'est un monomorphisme dans la catégorie abélienne $S_I(\mathcal{A})$.

1.1.8. Définition. Soit ϕ un morphisme dans $\check{S}_I^{(\vee)}(\mathcal{A})$, alors on dit que ϕ est strict si $\text{Ker } \phi$ et $\text{Coker } \phi$ dans la catégorie abélienne $\check{S}_I^{(\vee)}(\mathcal{A})$ appartiennent à $\check{S}_I^{(\vee)}(\mathcal{A})$.

1.1.9. Proposition. Soit $\phi: E' \rightarrow E$ un monomorphisme strict dans $S_I(\mathcal{A})$, i.e. on a une suite exacte dans la catégorie abélienne $S_I(\mathcal{A})$:

$$(1.1.9.1) \quad 0 \rightarrow E' \xrightarrow{\phi} E \rightarrow E'' \rightarrow 0,$$

telle que $\text{Coker } \phi = E'' \in S_I^e(\mathcal{A})$, alors $E' \in S_I^e(\mathcal{A})$ ssi $E \in S_I^e(\mathcal{A})$.

Preuve. Par récurrence sur $|I|$. Si $|I| = 1$, l'assertion résulte du lemme des cinq.

Si $|I| < 1$, posons $I = I' \cup \{*\}$, alors on a un diagramme

$$(1.1.9.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E'_0 & \rightarrow & E_0 & \rightarrow & E''_0 \rightarrow 0 \\ & & a' \uparrow & & a \uparrow & & a'' \uparrow \\ 0 & \rightarrow & E'_{-1} & \rightarrow & E_{-1} & \rightarrow & E''_{-1} \rightarrow 0 \end{array}$$

dans $S_I(\mathcal{A})$, qui correspond à (1.1.9.1). Si E' ou E appartient à $S_I^c(\mathcal{A})$, on a $E'_i, E_i, E''_i \in S_I^c(\mathcal{A})$ par hypothèse de récurrence; de plus, a' et a'' ou a et a'' sont des monomorphismes stricts, donc a' , a et a'' sont des monomorphismes stricts par le lemme des cinq et d'après 1.1.5. L'assertion résulte du fait que $E \in S_I^c(\mathcal{A})$ ssi $E_{-1}, E_0 \in S_I^c(\mathcal{A})$ et $E_{-1} \rightarrow E_0$ est un monomorphisme strict (de même pour E').

1.1.10. Corollaire. $S_I^c(\mathcal{A})$ est stable par extensions dans $S_I(\mathcal{A})$.

1.1.11. Corollaire. Pour $\phi \in \text{Mor } S_I^c(\mathcal{A})$, ϕ est strict dans la catégorie exacte $S_I^c(\mathcal{A})$ ssi il l'est dans $S_I(\mathcal{A})$ (cf. 1.1.8).

1.1.12. Proposition. Soient $\phi: E \rightarrow F$ et $\psi: F \rightarrow G$ des morphismes dans $S_I(\mathcal{A})$ tels que ψ soit un monomorphisme strict, alors ϕ est un monomorphisme strict ssi $\psi\phi$ l'est.

Preuve. Si ϕ ou $\psi\phi$ est un monomorphisme, ϕ , ψ et $\psi\phi$ sont des monomorphismes dans la catégorie abélienne, donc on applique la proposition 1.1.9 à la suite exacte:

$$0 \rightarrow \text{Coker } \phi \rightarrow \text{Coker } \psi\phi \rightarrow \text{Coker } \psi \rightarrow 0;$$

d'où l'assertion.

1.1.13. Définition. Soit $F_I(\mathcal{A})$ la catégorie additive des objet de $\mathcal{A}$ munis de I -filtrations, i.e. $\text{Ob } F_I(\mathcal{A}) = \{(A, F_I)\}$ où $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ et $F_I = \{F_I^p\}_{p \in \mathbb{Z}}\}_{i \in I}$ est une famille de filtrations décroissantes de A . Pour $\nu \in \mathbb{Z}^I$, on définit un foncteur

$$F^\nu: F_I(\mathcal{A}) \rightarrow S_I(\mathcal{A}) \quad (\text{resp. } \check{F}^\nu: F_I(\mathcal{A}) \rightarrow \check{S}_I(\mathcal{A}))$$

par

$$F^\nu(A, F_I) = \left\{ \bigcap_{j \in J} F_{jI}^{\nu_j} A \right\}_{J \subset I} \quad (\text{resp. } \check{F}^\nu(A, F_I) = \{A / \sum_{j \in J} F_{jI}^{1-\nu_j} A\}_{J \subset I}).$$

Soit $F_I^{(\nu)}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $F_I(\mathcal{A})$, définie par:

$$(A, F_I) \in F_I^{(\nu)}(\mathcal{A}) \text{ ssi } \check{F}^\nu(A, F_I) \in \check{S}_I^{(\nu)}(\mathcal{A}) \text{ pour tout } \nu \in \mathbb{Z}^I.$$

Si $(A, F_I) \in F_I^c(\mathcal{A})$, on dit que F_I sont des I -filtrations compatibles de A .

1.1.14. Lemme.

(1) $F_I^c(\mathcal{A}) = \check{F}_I^c(\mathcal{A})$ (donc $F_I^c(\mathcal{A}^\circ) = F_I^c(\mathcal{A})^\circ$)

(2) Pour une suite

$$(1.1.14.1) \quad 0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

de $F_I^c(\mathcal{A})$, l'image de (1.1.14.1) par F^ν est exacte ssi celle de (1.1.14.1) par $\check{F}^{1-\nu}$ l'est. Pour un morphisme ϕ de $F_I^c(\mathcal{A})$, $F^\nu(\phi)$ est strict ssi $\check{F}^{1-\nu}(\phi)$ l'est

Cela résulte de 1.1.5, car $S^{-1}F^\nu = \check{S}^{-1}\check{F}^{1-\nu}$ sur $F_I^c(\mathcal{A})$.

1.1.15. Définition. Une suite (1.1.14.1) de $F_I^c(\mathcal{A})$ est *exacte*, ssi son image par F^ν l'est pour tout $\nu \in \mathbf{Z}^I$. Un morphisme ϕ de $F_I^c(\mathcal{A})$ est *strict*, si $F^\nu(\phi)$ l'est pour tout $\nu \in \mathbf{Z}^I$.

1.1.16. Remarque. $F_I^c(\mathcal{A})$ est une catégorie exacte munie des suites exactes définies dans 1.1.15, cf. 1.3.3. Si un morphisme ϕ de $F_I^c(\mathcal{A})$ est strict, il existe $\text{Ker } \phi$, $\text{Coker } \phi$, $\text{Im } \phi$ et $\text{Coim } \phi$ dans $F_I^c(\mathcal{A})$ et $\text{Coim } \phi \xrightarrow{\sim} \text{Im } \phi$, car c'est valable pour tout $F^\nu(\phi)$ (ou $S^{-1}F^\nu(\phi)$).

1.2. Catégories dérivées et morphismes stricts

Soient $\overset{(\nu)}{S}_I(\mathcal{A})$, $\overset{(\nu)}{S}_I^c(\mathcal{A})$, $F_I(\mathcal{A})$ et $F_I^c(\mathcal{A})$ comme dans 1.1.

1.2.1. Définition. Soient $CF_I(\mathcal{A})$, $CF_I^c(\mathcal{A})$ et $\overset{(\nu)}{CS}_I(\mathcal{A})$ respectivement la catégorie des complexes de $F_I(\mathcal{A})$, $F_I^c(\mathcal{A})$ et $\overset{(\nu)}{S}_I(\mathcal{A})$, soient $KF_I(\mathcal{A})$, $KF_I^c(\mathcal{A})$ et $\overset{(\nu)}{KS}_I(\mathcal{A})$ comme dans [31], i.e. les morphismes sont les classes d'équivalence homotopie. Soit $H^k: \overset{(\nu)}{CS}_I(\mathcal{A}) \rightarrow \overset{(\nu)}{S}_I(\mathcal{A})$ (resp. $H^k: \overset{(\nu)}{KS}_I(\mathcal{A}) \rightarrow \overset{(\nu)}{S}_I(\mathcal{A})$) le foncteur cohomologique usuel ($k \in \mathbf{Z}$). On notera encore $\overset{(\nu)}{F}^\nu: CF_I(\mathcal{A}) \rightarrow \overset{(\nu)}{CS}_I(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{(\nu)}{F}^\nu: KF_I(\mathcal{A}) \rightarrow \overset{(\nu)}{KS}_I(\mathcal{A})$) le foncteur induit par $\overset{(\nu)}{F}^\nu$ ($\nu \in \mathbf{Z}^I$).

Soit $\overset{(\nu)}{KF}_I(\mathcal{A})^\emptyset$ (resp. $\overset{(\nu)}{KF}_I^c(\mathcal{A})^\emptyset$) la sous-catégorie pleine de $KF_I(\mathcal{A})$ (resp. $KF_I^c(\mathcal{A})$) définie par:

$$E^* \in \overset{(\nu)}{KF}_I(\mathcal{A})^\emptyset \text{ (resp. } \overset{(\nu)}{KF}_I^c(\mathcal{A})^\emptyset) \text{ ssi } H^k F^\nu(E^*) = 0 \\ \text{pour tout } \nu \in \mathbf{Z}^I, k \in \mathbf{Z}.$$

On définit

$$\overset{(\nu)}{D}\overset{(\nu)}{F}_I(\mathcal{A}) = \overset{(\nu)}{KF}_I(\mathcal{A}) / \overset{(\nu)}{KF}_I(\mathcal{A})^\emptyset \text{ (resp. } \overset{(\nu)}{D}\overset{(\nu)}{F}_I^c(\mathcal{A}) = \overset{(\nu)}{KF}_I^c(\mathcal{A}) / \overset{(\nu)}{KF}_I^c(\mathcal{A})^\emptyset) \\ \text{(Notons que } \overset{(\nu)}{KF}_I(\mathcal{A})^\emptyset \text{ (resp. } \overset{(\nu)}{KF}_I^c(\mathcal{A})^\emptyset) \text{ est une sous-catégorie épaisse [31].)}$$

Soit $\overset{(\nu)}{C}^s\overset{(\nu)}{F}_I(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{(\nu)}{C}^s\overset{(\nu)}{F}_I^c(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $CF_I(\mathcal{A})$ (resp. $CF_I^c(\mathcal{A})$) définie par:

$$E^* \in \overset{(\nu)}{C}^s\overset{(\nu)}{F}_I(\mathcal{A}) \text{ (resp. } \overset{(\nu)}{C}^s\overset{(\nu)}{F}_I^c(\mathcal{A})) \text{ ssi } H^k \overset{(\nu)}{F}^\nu(E^*) \in \overset{(\nu)}{S}_I^c(\mathcal{A}) \\ \text{pour tout } \nu, k.$$

Similairement on définit la sous-catégorie pleine $\overset{(\nu)}{D}^s\overset{(\nu)}{F}_I(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{(\nu)}{D}^s\overset{(\nu)}{F}_I^c(\mathcal{A})$) de $\overset{(\nu)}{D}\overset{(\nu)}{F}_I(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{(\nu)}{D}\overset{(\nu)}{F}_I^c(\mathcal{A})$) en utilisant $H^k \overset{(\nu)}{F}^\nu$ (mais $\overset{(\nu)}{D}^s\overset{(\nu)}{F}_I(\mathcal{A})$ et $\overset{(\nu)}{D}^s\overset{(\nu)}{F}_I^c(\mathcal{A})$ ne sont pas des catégories triangulées en général.)

1.2.2. Définition. On dit qu'un complexe E^* de $F_I(\mathcal{A})$ est *strict* (resp. *costrict*) si $E^* \in C^s F_I(\mathcal{A})$ (resp. $C^s \check{F}_I(\mathcal{A})$). Pour un morphisme ϕ dans $F_I(\mathcal{A})$, on dit que ϕ est *strict* (resp. *costrict*), si le complexe défini par ϕ l'est.

1.2.3. Proposition. Soient $E^* \in CF_I^c(\mathcal{A})$ et $\nu \in \mathbf{Z}^I$, alors:

- (i) $H^k F^\nu(E^*) \in S_I^c(\mathcal{A})$ pour tout k , si $H^k \check{F}^{1-\nu}(E^*) \in \check{S}_I^c(\mathcal{A})$ pour tout k .
- (ii) $H^k F^\nu(E^*) = 0$ pour tout k , si $H^k \check{F}^{1-\nu}(E^*) = 0$ pour tout k .
- (iii) $E^* \in C^s F_I^c(\mathcal{A})$, si $d^k: E^k \rightarrow E^{k+1}$ est un morphisme strict au sens de 1.1.15 pour tout k .
- (iv) $H^k F^\nu(E^*) = 0$ pour tout k, ν , si $d^k: E^k \rightarrow E^{k+1}$ est un morphisme strict au sens de 1.1.15 avec $\text{Im } d^{k-1} = \text{Ker } d^k$ pour tout k .

Il suffit de vérifier les assertions pour tout $S^{-1}F^\nu E^*$, donc cette proposition résulte du lemme suivant:

1.2.4. Lemme. Soit E^* un complexe de $C_{ec}^I(\mathcal{A})$, et soit $d^k: E^k \rightarrow E^{k+1}$ la différentielle de E^* . Posons

$$\begin{aligned} Z^k &= \text{Ker } d^k, \quad B^k = \text{Im } d^{k-1}, \quad C^k = \text{Coker } d^{k-1} \\ H^k &= Z^k / B^k \quad \text{dans } C^I(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) $H^k \in C_{ec}^I(\mathcal{A}), \forall k$ (b) $B^k \in C_{ec}^I(\mathcal{A}), \forall k$
- (c) $C^k \in C_{ec}^I(\mathcal{A}), \forall k$ (d) $Z^k \in C_{ec}^I(\mathcal{A}), \forall k$
- (e) $S(H^k) \in S_I^c(\mathcal{A}), \forall k$ (f) $\check{S}(H^k) \in \check{S}_I^c(\mathcal{A}), \forall k$.

Preuve. On démontre l'équivalence de (a), (b), (d) et (e) par récurrence sur $|I|$; un argument dual montre celle de (a), (b), (c) et (f).

Si $|I|=1$, on a $H^j(Z^k)=0$ pour $j \neq 1$ par le lemme de serpent pour $d^k: E^k \rightarrow E^{k+1}$, où $H^j: C^I(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ est le foncteur cohomologique usuel. D'après la suite exacte

$$0 \rightarrow Z^k \rightarrow E^k \rightarrow B^{k+1} \rightarrow 0$$

on a $H^j(B^{k+1})=H^{j+1}(Z^k)$, donc $H^j(B^k)=0$ pour $j \neq 0$. De la suite exacte

$$0 \rightarrow B^k \rightarrow Z^k \rightarrow H^k \rightarrow 0,$$

on déduit:

$$H^{-1}(H^k) = H^0(B^k), \quad H^0(H^k) = 0, \quad H^1(H^k) = H^1(Z^k);$$

ce qui montre l'assertion pour $|I|=1$.

Si $|I| > 1$, posons $I = I' \amalg \{*\}$, alors $E \in C_{ec}^I(\mathcal{A})$ est équivalent à une suite exacte courte de complexes de $C_{ec}^{I'}(\mathcal{A})$

$$(1.2.4.1) \quad 0 \rightarrow E_{-1} \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow 0.$$

Si une des conditions (a), (b), (d) et (e) est satisfaite, on a

$$H^k(E_i), B^k(E_i), Z^k(E_i) \in C_{ec}^{I'}(\mathcal{A}) \quad \text{pour } i = -1, 0$$

par hypothèse de récurrence; de plus, dans le cas où la condition (e) est satisfaite, $H^k(E_{-1}) \rightarrow H^k(E_0)$ est un monomorphisme strict dans $C_{ec}^{I'}(\mathcal{A})$ (par la définition de $S_i^c(\mathcal{A})$), donc on peut appliquer l'assertion pour $|I| = 1$ aux complexes de suites exactes courtes de A :

$$(1.2.4.1)^\vee \quad 0 \rightarrow E_{-1}^\vee \rightarrow E_0^\vee \rightarrow E_1^\vee \rightarrow 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}^{I'};$$

d'où l'assertion.

$$\begin{aligned} 1.2.5. \quad \text{Corollaire.} \quad DF_i^c(\mathcal{A}) &= D\check{F}_i^c(\mathcal{A}), \quad C^s F_i^c(\mathcal{A}) = C^s \check{F}_i^c(\mathcal{A}), \\ D^s F_i^c(\mathcal{A}) &= D^s \check{F}_i^c(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

1.2.6. Corollaire. Soit ϕ un morphisme de $F_i^c(\mathcal{A})$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) ϕ est strict dans $F_i(\mathcal{A})$ (cf. 1.2.2),
- (b) ϕ est costrict dans $F_i(\mathcal{A})$,
- (c) ϕ est strict au sens de 1.1.15.

1.2.7. Définition. Pour $i \in I$, posons $I' = I \setminus \{i\}$. Soient p, q des entiers ou $\pm\infty$ tels que $p \leq q$; on définit un foncteur

$$G_{I'}^{p,q}: F_i(\mathcal{A}) \rightarrow F_{I'}(\mathcal{A})$$

par

$$G_{I'}^{p,q}(A, F_i) = (F_i^p A / F_i^q A, F_{I'}),$$

où $F_i^\infty A = 0$, $F_i^{-\infty} A = A$ et $F_{I'} = \{F_j\}_{j \in I'}$ est une famille des filtrations induites sur $F_i^p A / F_i^q A$. On a alors des morphismes naturels de foncteurs $G_{I'}^{p,q} \rightarrow G_{I'}^{p',q'}$ pour $p \geq p', q \geq q'$. Posons $Gr_{F_i}^p = G_{I'}^{p,p+1}$, $G_{I'}^p = G_{I'}^{p,+\infty}$ et $G_{I'}^- = G_{I'}^{-\infty,+\infty}$.

1.2.8. Définition. Soit $\phi: E' \rightarrow E$ un morphisme de $CF_I(\mathcal{A})$, alors on dit que ϕ est un *monomorphisme strict cohomologique* (m.s.c.), si $\phi: H^k F^\nu E' \rightarrow H^k F^\nu E$ est un monomorphisme strict dans $S_I(\mathcal{A})$ pour tout k, ν , cf. 1.1.8.

1.2.9. Théorème. Soit $E^* = (A^*, F_i) \in CF_I(\mathcal{A})$, soient $i \in I, I' = I \setminus \{i\}$. Considérons les conditions suivantes:

- (0) $E^* \in C^s F_I(\mathcal{A})$,
- (i) $G_I^p(E^*) \in C^s F_{I'}(\mathcal{A})$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$,
- (ii) $G_{I'}(E^*) \in C^s F_{I'}(\mathcal{A})$,
- (iii) $G_I^p(E^*) \rightarrow G_{I'}(E^*)$ est un m.s.c. pour tout $p \in \mathbb{Z}$,
- (iv) $G_I^p(E^*) \rightarrow G_{I'}^q(E^*)$ est un m.s.c. pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \geq q$,
- (v) $G_I^{p+1}(E^*) \rightarrow G_{I'}^p(E^*)$ est un m.s.c. pour tout $p \in \mathbb{Z}$;

alors:

- (a) on a: $(0) \Leftrightarrow (i) + (iii) \Leftrightarrow (ii) + (iii) \Rightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$

- (b) si la condition:

(I) les limites inductives filtrantes existent dans $\mathcal{A}$ et sont exactes, est satisfaite, et si $\bigcup_p F_i^p A^* = A^*$, on a:

$$(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$$

- (c) si la condition (I) et les conditions $\bigcup_p F_i^p A^* = A^*$, $F_i^p A^* = 0$ ($p \gg 0$) sont satisfaites, alors $(0) \Leftrightarrow (v)$

- (d) si le morphisme $F^\nu G_I^p A^k \rightarrow F^\nu Gr_{F_i}^p A^k$ est un épimorphisme dans $S_{I'}(\mathcal{A})$ pour tout ν, p, k , et si $F_i^p A^* = 0$ pour $p \gg 0$, alors la condition (v) est équivalente à la condition:

- (vi) $(F_i^p A^*, F_i)$ est strict et $Gr_{F_i}^p(E^*) \in C^s F_{I'}(\mathcal{A})$ pour tout p .

Preuve. (a) résulte de 1.1.9 et 1.1.12, (b) et (c) sont évidentes; prouvons maintenant (d). Par hypothèse on a des suites exactes:

$$0 \rightarrow F^\nu G_I^{p+1} A^* \rightarrow F^\nu G_I^p A^* \rightarrow F^\nu Gr_{F_i}^p A^* \rightarrow 0.$$

Si (v) est satisfaite, on obtient des suites exactes:

$$(1.2.9.1) \quad 0 \rightarrow H^k F^\nu G_I^{p+1} A^* \rightarrow H^k F^\nu G_I^p A^* \rightarrow H^k F^\nu Gr_{F_i}^p A^* \rightarrow 0$$

donc $Gr_{F_i}^p E^* \in C^s F_{I'}(\mathcal{A})$ et $H^k F_i^{p+1} A^* \rightarrow H^k F_i^p A^*$ est un monomorphisme, i.e. $(F_i^p A^*, F_i) \in C^s F_{(i)}(\mathcal{A})$. Si (vi) est satisfaite, on vérifie par récurrence sur p que (1.2.9.1) est exacte et que $H^k F^\nu G_I^p A^* \in S_{I'}^c(\mathcal{A})$; en effet, d'après 1.1.9, il suffit de montrer que $H^k F^\nu G_I^{p+1} A^* \rightarrow H^k F^\nu G_I^p A^*$ est un monomorphisme dans $S_{I'}(\mathcal{A})$, mais cela résulte de l'injectivité de $H^k F_i^{p+1} A \rightarrow H^k F_i^p A$ et de $H^k F^\nu G_I^{p+1} A \in S_{I'}^c(\mathcal{A})$; d'où l'assertion.

1.2.10. Corollaire. Soient $E^* = (A^*, F_I) \in CF_I^c(\mathcal{A})$ et $I = I' \amalg \{i\}$. Si la condition (I) et les conditions $\bigcup_p F_i^p A = A$, $F_i^p A = 0$ ($p \gg 0$) sont satisfaites, alors on a $E^* \in C^s F_{I'}^c(\mathcal{A})$, ssi (A^*, F_i) est strict et $Gr_{F_i}^p(E^*) \in C^s F_{I'}^c(\mathcal{A})$ pour tout p .

En effet, l'hypothèse dans 1.2.9 (d) est satisfaite d'après $E^* \in CF_I^c(\mathcal{A})$, cf. 1.2.11 (2).

1.2.11. Remarques.

- (1) On a $F_I^c(\mathcal{A}) = F_I(\mathcal{A})$ si $|I| \leq 2$.
- (2) On a $(F_i^b A^*, F_I) \in C^s F_I(\mathcal{A})$ si $(A^*, F_I) \in C^s F_I(\mathcal{A})$; en particulier $(F_i^b A^*, F_I) \in CF_I^c(\mathcal{A})$ si $(A^*, F_I) \in CF_I^c(\mathcal{A})$.

1.2.12. Théorème. Soient $E = (A, F_I) \in F_I(\mathcal{A})$ et $I = I' \cup \{i\}$. Considérons les conditions suivantes:

- (0) $E \in F_I^c(\mathcal{A})$
- (i) $G_I^b(E) \in F_{I'}^c(\mathcal{A})$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$
- (ii) $G_{I'}(E) \in F_I^c(\mathcal{A})$
- (iii) $G_I^b(E) \rightarrow G_{I'}(E)$ est strict pour tout $p \in \mathbb{Z}$
- (iv) $G_I^b(E) \rightarrow G_I^q(E)$ est strict pour tout $p \geq q$
- (v) $G_I^{b+1}(E) \rightarrow G_I^b(E)$ est strict pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
- (vi) $F^v G_I^b(E) \rightarrow F^v Gr_{F_i}^b(E)$ est un épimorphisme dans $S_{I'}(\mathcal{A})$ pour tout p , et $Gr_{F_i}^b(E) \in F_{I'}^c(\mathcal{A})$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$;

alors:

- (a) on a $(0) \Leftrightarrow (i) + (iii) \Leftrightarrow (ii) + (iii) \Rightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$
- (b) si la condition (I) et la condition $\bigcup_p F_i^b A = A$ sont satisfaites, on a $(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$
- (c) si la condition (I) et les conditions $\bigcup_p F_i^b A = A$, $F_i^b A = 0$ ($p \gg 0$) sont satisfaites, on a $(0) \Leftrightarrow (vi)$.

Preuve. C'est un cas particulier du théorème 1.2.9 sauf (v) $\Leftrightarrow$ (vi), mais cela résulte de la définition 1.2.2.

1.2.13. Corollaire. Soit $(A^*, F_I) \in C^s F_I^c(\mathcal{A})$, on a alors $(F_i^b A^*, F_I) \in C^s F_I^c(\mathcal{A})$ pour tout i , $p \in \mathbb{Z}$, où F_I est la famille de filtrations induites sur $F_i^b A$; donc les foncteurs $Gr_{F_i}^b$ ($i \in I$), H^j commutent pour tout $p_i, j \in \mathbb{Z}$; en particulier, pour $(A, F_I) \in F_I^c(\mathcal{A})$,

$$Gr_{F_i}^{b_i} Gr_{F_j}^{b_j} \cdots Gr_{F_k}^{b_k} A$$

ne dépend pas de choix d'ordre de I .

Cela résulte de 1.2.3, 1.2.9 et 1.2.12.

1.2.14. Corollaire. Soient $I = \{i, j, k\}$ et $E = (A, F_I) \in F_I(\mathcal{A})$. Si la condition (I) et la condition $\bigcup_p F_i^b A = A$ sont satisfaites, alors $E \in F_I^c(\mathcal{A})$ si et si $F_i^b F_j^q F_k^r A \rightarrow F_j^q F_k^r Gr_{F_i}^b A$ est surjectif pour tout p, q, r .

1.2.15. Remarque. Soient $A_i (i \in I)$ des sous-objets de $A \in \mathcal{A}$. On dit que les A_i sont *compatibles*, s'il existe $S \in S_I^c(\mathcal{A})$ tel que $S_\emptyset = A$ et $S_{\{i\}} = A_i$. Pour des sous-objets $A_i (i \in I)$ de A , on définit des filtrations F_i par $F_i^{-1}A = A$, $F_i^0A = A_i$ et $F_i^1A = 0$. Alors les A_i sont des sous-objets compatibles de A , ssi $(A, F_I) \in F_I^c(\mathcal{A})$ par définition.

Pour $(A, F_I) \in F_I^c(\mathcal{A})$ et $j \in I, p \in \mathbb{Z}$, on définit une filtration F_* de A par $F_*^{-1}A = A$, $F_*^0A = F_j^0A$ et $F_*^1A = 0$. Posons $\tilde{I} = I \amalg \{*\}$. Alors

$$(1.2.15.1) \quad (A, F_{\tilde{I}}) \in F_{\tilde{I}}^c(\mathcal{A})$$

d'après 1.2.12 en utilisant les suites exactes dans $F_{I'}^c(\mathcal{A})$ (où $I' = I \setminus \{i\}$):

$$0 \rightarrow G_{I'}^{q,p} \rightarrow G_{I'}^{r,p} \rightarrow G_{I'}^{r,q} \rightarrow 0 \quad \text{pour } p > q > r, \text{ cf. 1.2.9.}$$

Pour $(A, F_I) \in F_I^c(\mathcal{A})$ et $j, k \in I, p, q \in \mathbb{Z}$, on définit F_* par $F_*^0A = F_j^0A \cap F_k^0A$ ou $F_j^0A + F_k^0A$ avec $F_*^{-1}A = A$ et $F_*^1A = 0$. Alors

$$(1.2.15.2) \quad (A, F_{\tilde{I}}) \in F_{\tilde{I}}^c(\mathcal{A})$$

d'après 1.2.12 et la stabilité des mono- (resp. épi-) morphismes stricts par compositions. On en déduit que pour $(A, F_I) \in F_I^c(\mathcal{A})$ tous éléments (de nombre fini) du sous-lattis du lattis des sous-objets de A , engendré par F_i^0A pour tout i , p sont des sous-objets compatibles de A ; en particulier, le sous-lattis ci-dessus est distributif. La dernière assertion avec sa réciproque a été démontrée par Deligne en utilisant la théorie de lattis.

1.3. Complément

1.3.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte, alors une filtration (décroissante) d'un objet E de $\mathcal{C}$ est une famille de monomorphismes stricts

$$u_{ij}: F^jE \rightarrow F^iE \quad (i, j \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}, i < j)$$

telle que $u_{ik} = u_{ij}u_{jk}$ pour $i < j < k$, où $F^{-\infty}E = E$, $F^{\infty}E = 0$.

Soit $F(\mathcal{C})$ la catégorie additive d'objets de $\mathcal{C}$, munis d'une filtration décroissante, où les morphismes sont des familles de morphismes

$$a_i: F^iE \rightarrow F^iE' \quad (i \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})$$

compatibles avec $\{u_{ij}\}$. On dit qu'une suite courte dans $F(\mathcal{C})$

$$(1.3.1.1) \quad 0 \rightarrow (E', F) \rightarrow (E, F) \rightarrow (E'', F) \rightarrow 0$$

est exacte, si

$$(1.3.1.2) \quad 0 \rightarrow F^i E' \rightarrow F^i E \rightarrow F^i E'' \rightarrow 0$$

l'est pour tout $i \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$. Notons que cette condition entraîne que

$$(1.3.1.3) \quad 0 \rightarrow (F^i/F^j)E' \rightarrow (F^i/F^j)E \rightarrow (F^i/F^j)E'' \rightarrow 0$$

est exacte pour $-\infty \leq i < j \leq \infty$, où $(F^i/F^j)E = \text{Coker } u_{ij}$ (cf. 1.3.2).

1.3.2. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ une catégorie abélienne telle que $\mathcal{C}$ soit une sous-catégorie pleine additive de $\tilde{\mathcal{C}}$, stable par extensions, et que'une suite courte de $\tilde{\mathcal{C}}$ soit exacte ssi elle l'est dans $\tilde{\mathcal{C}}$ [21], [24].

Soit $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}})$ la catégorie abélienne des foncteurs contravariants de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}$, i.e. les objets de $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}})$ sont des familles de morphismes de $\tilde{\mathcal{C}}$:

$$\{u_{ij}: E^j \rightarrow E^i \quad (-\infty \leq i < j < \infty)\}$$

tels que $u_{ij}u_{jk} = u_{ik}$ pour $i < j < k$; alors on peut identifier $F(\mathcal{C})$ avec une sous-catégorie pleine de $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}})$, de sorte que

$$\{u_{ij}: E^j \rightarrow E^i\} \in F(\mathcal{C}) \text{ ssi } E^j \in \mathcal{C} \ (j \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\})$$

et u_{ij} sont des monomorphismes stricts dans $\mathcal{C}$ ($i < j$).

On vérifie que $F(\mathcal{C})$ est stable par extensions dans $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}})$ et que une suite courte de $F(\mathcal{C})$ soit exacte ssi elle l'est dans $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}})$; en particulier, $F(\mathcal{C})$ est une catégorie exacte munie des suites exactes définies dans 1.3.1, de plus l'exactitude de (1.3.1.2) pour tout i entraîne celle de (1.3.1.3) pour tout $i < j$.

1.3.3. Soit I un ensemble fini (non vide). Supposons que I soit totalement ordonné. On définit $F_I^c(\mathcal{C})$ (resp. $\tilde{F}_I(\tilde{\mathcal{C}})$) par récurrence sur $|I|$:

$$F_I^c(\mathcal{C}) = F(F_I^c(\mathcal{C})) \text{ (resp. } \tilde{F}_I(\tilde{\mathcal{C}}) = \tilde{F}(\tilde{F}_I(\tilde{\mathcal{C}}))) \text{ où } I' = I \setminus \{i\}$$

et $i = \max I$.

On vérifie que $\tilde{F}_I(\tilde{\mathcal{C}})$ est équivalente à la catégorie des foncteurs contravariants de $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})^I$ dans $\tilde{\mathcal{C}}$, donc indépendante de l'ordre choisi de I . Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, cette définition de $F_I^c(\mathcal{C})$ coïncide avec celle de 1.1.13 d'après 1.2.12. En général, $F_I^c(\mathcal{C})$ est identifiée avec une sous-catégorie pleine de $F_I^c(\tilde{\mathcal{C}})$ définie par:

$$(E, \{F_i\}) \in F_I^c(\mathcal{C}) \text{ ssi } (F_{i_1}^{p_1}/F_{i_1}^{q_1}) \cdots (F_{i_k}^{p_k}/F_{i_k}^{q_k})E \in \mathcal{C}$$

pour tout $-\infty \leq p_i < q_i \leq +\infty$ ($i \in I$);

(en particulier, $F_I^c(\mathcal{C})$ est indépendant de l'ordre de I), car on a le lemme suivant:

1.3.4. Lemme. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des catégories exactes, supposons que $\mathcal{C}'$

est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, stable par extensions et qu'une suite courte de $\mathcal{C}'$ est exacte ssi elle l'est dans $\mathcal{C}$; alors $F(\mathcal{C}')$ est une sous-catégorie pleine de $F(\mathcal{C})$ telle que

$$(E, F) \in F(\mathcal{C}') \text{ ssi } (F^p/F^q)E \in \mathcal{C}' \quad (-\infty \leq p < q \leq +\infty);$$

donc $F(\mathcal{C}')$ est stable par extensions dans $F(\mathcal{C})$ et une suite courte de $F(\mathcal{C}')$ est strict ssi elle l'est dans $F(\mathcal{C})$.

1.3.5. Soit (E, d) un complexe d'une catégorie exacte $\mathcal{C}$, on dit que E° est strict, si $d^i: E^i \rightarrow E^{i+1}$ est strict ($i \in \mathbb{Z}$) et $\text{Im } d^{i-1} \rightarrow \text{Ker } d^i$ est un monomorphisme strict ($i \in \mathbb{Z}$).

Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ comme dans 1.3.2, on dit que (E, d) est faiblement strict rel. à $\tilde{\mathcal{C}}$ si $H^i E \in \mathcal{C}$ ($i \in \mathbb{Z}$), où $H^i E = \text{Ker } d^i / \text{Im } d^{i-1}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}$.

Considérons la condition suivante:

(1.3.5.1) Si vu est un monomorphisme strict, alors u l'est.

Si (1.3.5.1) est satisfaite, alors (E, d) est strict ssi d^i sont strict. La condition (1.3.5.1) est satisfaite pour $\mathcal{C} = F_I^c(\mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, et un complexe de $F_I^c(\mathcal{A})$ est strict ssi il est faiblement strict rel. à $\tilde{F}_I(\mathcal{A})$, d'après 1.2.4.

1.3.6. Soit (E°, W) un complexe de $F(\mathcal{C})$. Supposons que W est finie sur chaque E^i . On a alors une suite spectrale dans $\tilde{\mathcal{C}}$:

$$E_0^{p,q} = Gr_W^p E^{p+q} \Rightarrow H^{p+q} E^\circ.$$

Si la condition:

$S(r)$: les complexes

$$\{\dots \rightarrow E_r^{p-r, q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p, q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r, q-r+1} \rightarrow \dots\}$$

sont faiblement stricts rel. à $\mathcal{C}$ (donc $E_{r+1}^{p,q} \in \tilde{\mathcal{C}}$),

est de proche en proche satisfaite pour tout $r \geq 0$, alors

$$Gr_W^p H^{p+q} E \simeq E_\infty^{p,q} \in \mathcal{C}, \quad \text{donc } H^{p+q} E \in \mathcal{C},$$

i.e. le complexe E° est faiblement strict rel. à $\tilde{\mathcal{C}}$, et W est une filtration de $H^{p+q} E \in \mathcal{C}$ (comparer à ([6; (1.3.16), (7.2.5)]).

1.3.7. Soit (E°, W) un complexe de $F(\mathcal{C})$. Si la condition:

$$(1.3.7.1) \quad d: Gr_W^p E^i \rightarrow Gr_W^p E^{i+1} \text{ est strict pour tout } i, p,$$

est satisfaite, $d: W^p E^i \rightarrow E^{i+1} / W^{p+1} E^{i+1}$ sont stricts car

$$W^p E^i \rightarrow Gr_W^p E^i \quad (\text{resp. } Gr_W^p E^{i+1} \rightarrow E^{i+1}/W^{p+1} E^{i+1})$$

sont des épi- (resp. mono-) morphismes stricts; on a donc

$$\text{Dec}(W)^p E^i := \text{Ker}(d: W^{p+i} E^i \rightarrow E^{i+1}/W^{p+i+1} E^{i+1}) \in \mathcal{C}$$

(cf. [6.(1.3.3)]). De plus, $\text{Dec}(W)^p E^i \rightarrow \text{Dec}(W)^{p-1} E^i$ (resp. $\text{Dec}(W)^p E^i \rightarrow E^i$) est un monomorphisme strict, car $\text{Dec}(W)^p E^i \rightarrow W^{p+i} E^i$ l'est et on a une suite exacte dans $\mathcal{C}$:

$$0 \rightarrow W^{p+i} E^i \rightarrow \text{Dec}(W)^{p-1} E^i \rightarrow \text{Ker}(Gr_W^{p+i-1} d^i) \rightarrow 0;$$

donc on obtient une filtration $\text{Dec}(W)$ de E^* . Notons que “Dec” commute à un foncteur exact, i.e. si $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur exact de catégories exactes, on a

$$(\phi(E), \phi(\text{Dec } W)) \simeq (\phi(E), \text{Dec}(\phi W)).$$

Si, de plus, la condition $S(r)$ de 1.3.6 pour (E, W) est satisfaite pour $r \leq 1$, alors les complexes $Gr_{\text{Dec } W}^p E$ sont faiblement stricts rel. à $\tilde{\mathcal{C}}$ d'après [6.(1.3.4)]; en particulier, si $(K_A, (L_{A \otimes Q}, W), (K_C; W, F))$ est un complexe de Hodge mixte [6.(8.1.5.)], alors $(K_C; \text{Dec } W, F)$ est strict d'après 1.2.10, car $(K_C, \text{Dec } W)$ et $(Gr_{\text{Dec } W}^p K_C, F)$ sont stricts (cf. 1.3.5).

1.3.8. Soit $(E^* L; W) = ((E^*, L), W)$ un complexe de $F_i^c(\mathcal{C}) = F(F(\mathcal{C}))$ (i.e. $|I| = 2$). Supposons que la filtration L est finie sur chaque E^i , que les complexes filtrés $Gr_W^p(E, L)$ appartiennent à $C^s F(\tilde{\mathcal{C}})$ pour tout p , et que la condition 1.3.7.1 est satisfaite pour les complexes $(Gr_L^j E, W)$; alors la condition 1.3.7.1 est satisfaite pour $((E, L), W)$, donc on obtient un complexe de $F_i^c(\mathcal{C})$ par:

$$(E; L, \text{Dec } W) = ((E, L), \text{Dec } W);$$

de plus, on a

$$\text{Dec}(W)^p(L^j E) = \text{Dec}(W)^p L^j E \quad \text{et} \quad \text{Dec}(W)^p(Gr_L^j E) = \text{Dec}(W)^p Gr_L^j E$$

où $(L^j E, \text{Dec } W)$ (resp. $(Gr_L^j E, \text{Dec } W)$) est défini pour $(L^j E, W)$ (resp. $(Gr_L^j E, W)$).

En effet, $Gr_W^p d^i: Gr_W^p(E^i, L) \rightarrow Gr_W^p(E^{i+1}, L)$ sont stricts dans $F(\tilde{\mathcal{C}})$ d'après 1.2.3, donc il suffit de vérifier que $\text{Ker } Gr_L Gr_W^p d^i$, $\text{Coker } Gr_L Gr_W^p d^i$ et $\text{Im } Gr_L \cdot Gr_W^p d^i$ appartiennent à $\mathcal{C}$, mais cela résulte de l'hypothèse. La deuxième résulte du fait que le foncteur

$$F(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C} \text{ défini par } (E, L) \mapsto L^j E \text{ (ou } (E, L) \mapsto Gr_L^j E)$$

est un foncteur exact.

Considérons la suite spectrale dans $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}})$:

$$(1.3.8.1) \quad E_0^{p,q} = Gr_L^p(E^{p+q}, \text{Dec } W) \Rightarrow H^{p+q}(E, \text{Dec } W).$$

Si la condition $S(r)$ pour la suite spectrale (1.3.8.1) est satisfaite pour tout $r \geq 0$, on a alors $E_\infty^{p,q} = Gr_L^p H^{p+q}(E, \text{Dec } W) \in F(\mathcal{C})$, i.e. L est une filtration de $H^{p+q}(E, \text{Dec } W) \in F(\mathcal{C})$ dans $F(\mathcal{C})$. Supposons que W est finie sur chaque E^i , alors, d'après [6.(1.3.2), (1.3.4)], la condition $S(0)$ est satisfaite pour (1.3.8.1), si la suite spectrale dans $\tilde{\mathcal{C}}$:

$$(1.3.8.2) \quad E_0^{p,q} = Gr_W^p Gr_L^i E^{p+q} \Rightarrow H^{p+q} Gr_L^i E$$

dégénère en E_2 pour tout j , et si la condition $S(r)$ pour la suite spectrale (1.3.8.2) est satisfaite pour $r \leq 1$, $j \in \mathbb{Z}$ (car un complexe (E', F) de $F(\mathcal{C})$ est faiblement strict rel. à $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}})$, si (E', F) est strict dans $F(\tilde{\mathcal{C}})$ et les $Gr_F^i E'$ sont faiblement stricts rel. à $\tilde{\mathcal{C}}$, où $E' = Gr_L^i E$ et $F = \text{Dec } W$), comparer à [6.(8.1.15)], où $S(r)$ pour (1.3.8.1) est satisfaite pour $r \geq 1$ d'après l'existence de structures de Hodge mixtes.

1.3.9. Soient M un objet d'une catégorie abélienne, muni d'une filtration finie croissante L , et N un endomorphisme nilpotent de M qui respecte L . D'après [7.(1.6.13)] il existe au plus une filtration finie croissante W de M telle que $NW_i M \subset W_{i-2} M$ et que

$$(1.3.9.1) \quad N^k: Gr_{i+k}^W Gr_i^L M \xrightarrow{\sim} Gr_{i-k}^W Gr_i^L M,$$

de plus, on a une formule inductive (si elle existe):

$$(1.3.9.2) \quad \begin{aligned} W_{-i+k} L_k M &= W_{-i+k} L_{k-1} M + N^i W_{i+k} L_k M & i > 0, \\ W_{i+k} L_k M &= \text{Ker}(N^{i+1}: L_k M \rightarrow L_k M / W_{-i-2+k} L_k M) & i \geq 0. \end{aligned}$$

On dit que W est la *filtration associée à N relativement à L* . Si $Gr_i^W M = 0$ pour $i \neq n$, on dit que W est la filtration associée à N *décalée par n* .

1.3.10. Soit E un objet d'une catégorie exacte $\mathcal{C}$, muni d'une filtration finie croissante L , soit N un endomorphisme nilpotent de $(E, L) \in F(\mathcal{C})$. D'après 1.3.9, il existe au plus une filtration finie croissante W de $(E, L) \in F(\mathcal{C})$ telle que N induit un morphisme $N: (E^*; L, W) \rightarrow (E^* L; W[2])$ et que (1.3.9.1) soit satisfaite en remplaçant M par E , où $(W[2])_i = W_{i-2}$ car W est croissante.

Soit $u: ((E_1, L), N) \rightarrow ((E_2, L), N)$ un morphisme de tels deux objets, i.e. u est un morphisme de $F(\mathcal{C})$, compatible avec l'action de N ; alors u induit un (unique) morphisme $\tilde{u}: (E_1, L; W) \rightarrow (E_2, L; W)$ de $F(F(\mathcal{C}))$, car c'est valable dans $F(F(\tilde{\mathcal{C}}))$ d'après (1.3.9.2). Si, de plus, $\tilde{u}$ est strict, la filtration W sur $\text{Ker } u$, $\text{Im } u$, $\text{Coker } u$ est la filtration associée à N relativement à L .

1.3.11. Soit $((E^*, L), W)$ un complexe de $F(F(\mathcal{C}))$. Supposons que toutes les

hypothèse de 1.3.8 soient satisfaites, que la suite spectrale (1.3.8.1) dégénère en E' et qu'il existe un morphisme $N: (E^*; L, W) \rightarrow (E^*, L; W[2])$ dans la catégorie dérivée, tel que l'action de N sur chaque $H^i Gr_j^L E$ soit nilpotente et que la filtration décalée $\text{Dec } W$ sur $H^i Gr_j^L E$ soit la filtration associée à N décalée par $i+j$, où $L_j = L^{-j}$, $W_i = W^{-i}$ et $(\text{Dec } W)_i = (\text{Dec } W)^{-i}$. (Notons que le complexe $Gr_j^L(E, \text{Dec } W)$ est faiblement strict rel. à $\tilde{C}$ par la condition $S(0)$ pour (1.3.8.1).) Alors, d'après 1.3.8, $E_\infty^{pq} = Gr_{-p}^L H^{p+q}(E, \text{Dec } W) \in F(C)$, i.e. on obtient $(H^i E; L, \text{Dec } W) \in F(F(C))$, de plus la filtration $\text{Dec } W$ sur $H^i E$ est la filtration associée à N relativement à $\text{Dec } L$, car le morphisme

$$d_1: H^i Gr_j^L(E, \text{Dec } W) \rightarrow H^{i+1} Gr_{j-1}^L(E, \text{Dec } W)$$

est compatible à l'action de N , et est strict par hypothèse (donc la filtration $\text{Dec } W$ sur $E_\infty^{pq} = Gr_{-p}^L H^{p+q} E$ est la filtration associée à N décalée par q .)

1.3.12. Remarque. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte, on dit que $\mathcal{C}$ est semi-simple, si toutes les suites exactes de $\mathcal{C}$ scindent. Si $\mathcal{C}$ est semi-simple, on vérifie que $F_f(\mathcal{C})$ la catégorie des objet de $\mathcal{C}$ munis d'une filtration finie est semi-simple, et que $\phi: (E_1, F) \rightarrow (E_2, F)$ un morphisme de $F_f(\mathcal{C})$ est strict sii ϕ est isomorphe à la somme directe de morphismes stricts dans $\mathcal{C}$: $\phi_i: E_1^i \rightarrow E_2^i$ tels que $F^p(E_j) \simeq \bigoplus_{i \geq p} E_j^i$ ($j=1, 2$). En effet, pour une suite exacte de $F_f(\mathcal{C})$:

$$(1.3.12.1) \quad 0 \rightarrow (E_{-1}, F) \rightarrow (E_0, F) \rightarrow (E_1, F) \rightarrow 0$$

et pour $\bigoplus_i E_{\pm 1}^i$ un scindage de $(E_{\pm 1}, F)$, on a $\bigoplus_i E_0^i$ un scindage de (E_0, F) compatible avec (1.3.12.1) et avec les scindages de $(E_{\pm 1}, F)$, tel que les suites exactes de $\mathcal{C}$:

$$0 \rightarrow E_{-1}^i \rightarrow E_0^i \rightarrow E_1^i \rightarrow 0$$

se scindent.

En particulier, si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne semi-simple, e.g. celle des espaces vectoriels sur un corps, $F_{If}^c(\mathcal{A})$ la catégorie des objets de $\mathcal{C}$, munis de I -filtrations finies compatibles est semi-simple; un objet $(A, F_i(i \in I))$ de $F_{If}^c(\mathcal{A})$ est isomorphe à $(\bigoplus_{v \in \mathbb{Z}^1} B^v, F_i(i \in I))$ où $F_i^p(\bigoplus B^v) = \bigoplus_{v_i \geq p} B^v$, et $(A^*, F_i(i \in I))$ un complexe de $F_{If}^c(\mathcal{A})$ est strict sii A^* est isomorphe à $\bigoplus_v B^{v^*}$ (dans la catégorie de complexes) tel que $F_i^p A^* \simeq \bigoplus_{v_i \geq p} B^{v^*}$.

§2. $\mathcal{D}$ -Modules Filtrés

(2.0.1) On suppose que toutes les variétés complexes lisses considérées dans

cet article sont paracompacts et de dimension pure. La dimension de X sera notée d_X .

(2.0.2) Soit $n \in \mathbb{Z}$, on définit le "twist de Tate" par :

$$M(n) = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(n) \quad \text{pour } M \text{ un } \mathbb{Z}\text{-Module,}$$

où $\mathbb{Z}(n) := (2\pi i)^n \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Si M est un $\mathbb{C}$ -Module, on a un isomorphisme canonique :

$$M(n) \xrightarrow{\sim} M$$

induit par l'isomorphisme : $\mathbb{C}(n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

2.1. $\mathcal{D}$ -Modules filtrés et $\mathcal{B}$ -Modules gradués.

2.1.1. Soit X une variété complexe lisse. Soit $\mathcal{D}_X$ l'Anneau des opérateurs différentiels linéaires sur X , muni de la filtration F par l'ordre des opérateurs. On définit un Anneau gradué sur X par $\mathcal{B} = \bigoplus_p F_p \mathcal{D}_X$ (cf. [12]).

Soit $MF(\mathcal{D}_X)$ la catégorie additive des $\mathcal{D}_X$ -Modules (à droite) filtrés, dont les objets (M, F) satisfont les conditions :

$$(2.1.1.1) \quad \bigcup_p F_p M = M,$$

$$(2.1.1.2) \quad F_p M = 0 \quad \text{pour } p \ll 0 \text{ localement sur } X,$$

$$(2.1.1.3) \quad (F_p M)(F_q \mathcal{D}_X) \subset F_{p+q} M \quad \text{pour tout } p, q \in \mathbb{Z},$$

et dont les morphismes sont $\mathcal{D}_X$ -linéaires et respectent la filtration.

Soit $MG(\mathcal{B})$ la catégorie abélienne des $\mathcal{B}$ -Modules (à droite) gradués dont les objets M satisfont la condition :

$$(2.1.1.4) \quad M_p = 0 \quad \text{pour } p \ll 0 \text{ localement sur } X.$$

On a alors un foncteur canonique :

$$\oplus : MF(\mathcal{D}_X) \rightarrow MG(\mathcal{B}) \quad (\text{resp. } \lim : MG(\mathcal{B}) \rightarrow MF(\mathcal{D}_X))$$

défini par :

$$\oplus(M, F) = \bigoplus_p F_p M \quad (\text{resp. } \lim M. = (\varinjlim M_i, F))$$

où $F_p(\varinjlim M_i) = \text{Im}(F_p M \rightarrow \varinjlim M_i)$. Notons que les morphismes $M_i \rightarrow M_{i+1}$ sont induits par l'action de $1 \in \mathcal{B}_1 = F_1 \mathcal{D}_X$.

2.1.2. Remarque. La catégorie $MF(\mathcal{D}_X)$ s'identifie, par le foncteur $\oplus$, à la sous-catégorie pleine de $MG(\mathcal{B})$ des objets sur lesquels l'action de $1 \in \mathcal{B}_1$ est injective.

2.1.3. Soit (L, F) un $\mathcal{O}_X$ -Module filtré tel que $F_p L = 0$ pour $p \ll 0$ localement

sur X . On définit un $\mathcal{D}_X$ -Module filtré (M, F) (resp. un $\mathcal{B}$ -Module gradué M), noté $(L, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)$ (resp. $(L, F) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}$), par :

$$M = L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_X, \quad F_p M = \sum_i F_{p-i} L \otimes F_i \mathcal{D}_X \quad (\text{resp. } M_p = \sum_i F_{p-i} L \otimes F_i \mathcal{D}_X).$$

On dit que $(M, F) \in MF(\mathcal{D}_X)$ (resp. $M \in MG(\mathcal{B})$) est un Module induit s'il est isomorphe à $(L, F) \otimes (\mathcal{D}_X, F)$ (resp. $(L, F) \otimes \mathcal{B}$) pour un $\mathcal{O}_X$ -Module filtré (L, F) comme ci-dessus. On notera $MF_i(\mathcal{D}_X)$ (resp. $MG_i(\mathcal{B})$) la sous-catégorie pleine de $MF(\mathcal{D}_X)$ (resp. $MG(\mathcal{B})$) des Modules induits.

On dit que (M, F) (resp. M .) est un Module induit de degré p , s'il est isomorphe à $(L, F) \otimes (\mathcal{D}_X, F)$ (resp. $(L, F) \otimes \mathcal{B}$) avec $Gr_i^F L = 0$ pour $i \neq p$; dans ce cas, celui-ci est noté aussi $L \otimes (\mathcal{D}_X, F[p])$ (resp. $L \otimes \mathcal{B}(p)$).

2.1.4. Remarque. Le foncteur $\oplus$ établit une équivalence de catégories : $MF_i(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} MG_i(\mathcal{B})$.

2.1.5. Soit $(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{-\bullet} \Theta_X, F) \rightarrow (\mathcal{O}_X, F)$ la résolution canonique par des $\mathcal{D}_X$ -Modules (à gauche) filtrés (cf. [18]), i.e. le premier complexe est localement isomorphe au complexe de Koszul $K(\mathcal{D}_X; \cdot \partial_i (1 \leq i \leq d_X)) [d_X]$ (où $\cdot \partial_i$ signifie la multiplication à droite), dont la filtration s'écrit :

$$F_p(\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{A}^{-i} \Theta_X) = F_{p+i} \mathcal{D}_X \otimes \mathcal{A}^{-i} \Theta_X,$$

et la filtration F de $\mathcal{O}_X$ est définie par $Gr_p^F \mathcal{O}_X = 0$ pour $p \neq 0$. Ici, le morphisme entre les complexes est défini par la surjection canonique : $\mathcal{D}_X \ni P \mapsto P1 \in \mathcal{O}_X$. Soit $(M, F) \in MF(\mathcal{D}_X)$, on a alors un complexe de $MF(\mathcal{D}_X)$:

$$(M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{A}^{-\bullet} \Theta_X, F)$$

et un morphisme canonique de ce complexe filtré dans (M, F) .

2.1.6. Lemme. Les $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés $(M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{A}^{-i} \Theta_X, F)$ sont des Modules induits, et le morphisme canonique :

$$(2.1.6.1) \quad (M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{A}^{-\bullet} \Theta_X, F) \rightarrow (M, F)$$

est un quasi-isomorphisme filtré.

Preuve. Posons $L = \mathcal{A}^{-i} \Theta_X$, alors le morphisme canonique

$$(M \otimes_{\mathcal{O}} L, F[i]) \hookrightarrow (M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X \otimes L, F[i])$$

induit un morphisme $\mathcal{D}_X$ -linéaire filtré :

$$(2.1.6.2) \quad (M \otimes_{\mathcal{O}} L, F[i]) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F) \rightarrow (M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X \otimes L, F[i]).$$

On vérifie facilement que c'est un isomorphisme filtré (on peut aussi utiliser le

lemme 2.4.2); d'où la première assertion. Par définition, le gradué associé du premier complexe de (2.1.6.1) est localement isomorphe au complexe de Koszul:

$$K(Gr^F M \otimes Gr^F \mathcal{D}_X; gr \partial_i \otimes 1 - 1 \otimes gr \partial_i \quad (1 \leq i \leq d_X)) [d_X],$$

donc, en utilisant la filtration par le degré de $gr \partial_i \in Gr^F \mathcal{D}_X$, on voit que le gradué associé de (2.1.6.1) est un quasi-isomorphisme.

2.1.7. Corollaire. Soit $(M, F) \in MF(\mathcal{D}_X)$ (resp. $M_\bullet \in MG(\mathcal{B})$), alors il existe une résolution finie, canonique et fonctorielle:

$$(L^\bullet, F) \simeq (M, F) \quad (\text{resp. } L_\bullet \simeq M_\bullet)$$

par des Modules induits.

Preuve. Soit $M_\bullet \in MG(\mathcal{B})$. Posons $L_\bullet = \bigoplus_p M_p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}(p)$. Alors $L_\bullet$ est un Module induit, et on a une suite exacte dans $MG(\mathcal{B})$:

$$(2.1.7.1) \quad 0 \rightarrow K_\bullet \rightarrow L_\bullet \rightarrow M_\bullet \rightarrow 0.$$

Puisque l'action de $1 \in \mathcal{B}_1$ est injective sur $K_\bullet$, l'assertion est réduite au cas de $MF(\mathcal{D}_X)$, donc cela résulte du lemme 2.1.6.

2.1.8. Soit $\star = b, +, -$ ou ∞ . Soient

$$C^\star F(\mathcal{D}_X) = C^\star(MF(\mathcal{D}_X)) \quad \text{et} \quad K^\star F(\mathcal{D}_X) = K^\star(MF(\mathcal{D}_X))$$

comme dans [31], où C^∞ (resp. K^∞) sera noté aussi C (resp. K). Ici, on suppose que la condition (2.1.1.2) pour chaque composante (M^i, F) des objets de $C^\star F(\mathcal{D}_X)$ (et de $K^\star F(\mathcal{D}_X)$) est satisfaite uniformément pour i . Pour $\star = b, +, -$ ou $\emptyset$, on notera $K^\star F(\mathcal{D}_X)^\star$ la sous-catégorie pleine de $K^\star F(\mathcal{D}_X)$ des objets $(M^\star, F)$ satisfaisant la condition:

$$(2.1.8.9) \quad \mathcal{H}^i Gr^F M^\star = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} |i| \gg 0 & \text{si } \star = b \\ i \ll 0 & \text{si } \star = + \\ i \gg 0 & \text{si } \star = - \\ \text{tout } i & \text{si } \star = \emptyset \end{cases}$$

Posons $K^\star F(\mathcal{D}_X)^\infty = K^\star F(\mathcal{D}_X)$. Pour $\star, \ast = b, +, -$ ou ∞ , on définit

$$D^\star F(\mathcal{D}_X)^\ast = K^\star F(\mathcal{D}_X)^\ast / K^\star F(\mathcal{D}_X)^\emptyset.$$

Posons $D^\star F(\mathcal{D}_X) = D^\star F(\mathcal{D}_X)^\infty$ et $DF(\mathcal{D}_X)^\ast = D^\infty F(\mathcal{D}_X)^\ast$. De même, on définit $D^\star G(\mathcal{B})^\ast$, etc., en remplaçant $\mathcal{H}^i Gr^F$ par $\mathcal{H}^i$ dans la condition (2.1.8.9).

2.1.9. Lemme. Pour $\star, \ast = b, +, -$ ou ∞ , $K^\star F(\mathcal{D}_X)^\emptyset$ est une sous-caté-

gorie épaisse de $K^\star F(\mathcal{D}_X)^\star$ (donc $D^\star F(\mathcal{D}_X)^\star$ est une catégorie triangulée, cf. [31]). De plus $D^\star F(\mathcal{D}_X)^\star$ est une sous-catégorie triangulée pleine de $DF(\mathcal{D}_X)$, et le foncteur naturel: $D^\star F(\mathcal{D}_X) \rightarrow DF(\mathcal{D}_X)^\star$ est une équivalence de catégories. (De même pour $DG(\mathcal{B})$).

Preuve. Par le même argument que dans [loc. cit.], il suffit de définir le triangle de $K^\star F(\mathcal{D}_X)$:

$$\rightarrow \tau_{\leq i}(M^\star, F) \rightarrow (M^\star, F) \rightarrow \tau_{> i}(M^\star, F) \rightarrow$$

tel que $\tau_{\leq i}(M^\star, F)$ (resp. $\tau_{> i}(M^\star, F)$) $\in K^\star F(\mathcal{D}_X)^\emptyset$ pour $i \ll 0$ (resp. $i \gg 0$), si $(M^\star, F) \in K^\star F(\mathcal{D}_X)^+$ (resp. $K^\star F(\mathcal{D}_X)^-$). Donc il suffit de vérifier que $d^i: (M^i, F) \rightarrow (M^{i+1}, F)$ est strict pour $i \ll 0$ (resp. $i \gg 0$), si $(M^\star, F)$ est comme ci-dessus; mais c'est évident (cf. la preuve de 1.2.4; voir aussi [21].) L'assertion pour $DG(\mathcal{B})$ est évidente.

2.1.10. Soit $(M, F) \in MF_i(\mathcal{D}_X)$, cf. 2.1.3. On définit une filtration G de (M, F) par:

$$G_i(M, F) = ((F_i M) \mathcal{D}_X, F)$$

où F est la filtration induite sur $(F_i M) \mathcal{D}_X$. Alors chaque $Gr_i^G(M, F)$ est un Module induit de degré i . Soit $MF_i^f(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $MF_i(\mathcal{D}_X)$ des objets satisfaisant la condition:

$$(2.1.10.1) \quad G_i(M, F) = (M, F) \quad \text{pour } i \gg 0 \text{ localement sur } X.$$

On définit $C^\star F_i(\mathcal{D}_X)$ et $K^\star F_i(\mathcal{D}_X)$ (resp. $C^\star F_i^f(\mathcal{D}_X)$ et $K^\star F_i^f(\mathcal{D}_X)$) comme dans 2.1.8 (où la condition (2.1.10.1) est satisfaite uniformément). Alors

$$K^\star F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)^\emptyset = K^\star F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X) \cap KF(\mathcal{D}_X)^\emptyset$$

est une sous-catégorie épaisse. Posons

$$D^\star F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X) = K^\star F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X) / K^\star F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)^\emptyset$$

On définit similairement $D^\star G_i^{(f)}(\mathcal{B})$ (où la filtration G est définie par l'équivalence dans 2.1.4.), alors cette catégorie triangulée est équivalente à $D^\star F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)$ par définition. Ici (f) signifie qu'il y a deux énoncés l'un pour $K^\star F_i^f(\mathcal{D}_X)$ etc. et l'autre pour $K^\star F_i(\mathcal{D}_X)$ etc.

2.1.11. Lemme. Si $(M^\star, F) \in K^\star F_i(\mathcal{D}_X)^\emptyset$, on a $Gr_i^G(M^\star, F) \in K^\star F_i(\mathcal{D}_X)^\emptyset$ pour tout i . Donc, si $(M^\star, F) \rightarrow (N^\star, F)$ est un quasi-isomorphisme filtré dans $K^\star F_i(\mathcal{D}_X)$, alors $Gr_i^G(M^\star, F) \rightarrow Gr_i^G(N^\star, F)$ l'est pour tout i .

Preuve. On a $Gr_i^G(M^*, F) \in K^*F_i(\mathcal{D}_X)^\emptyset$ si $Gr_i^F Gr_i^G M^*$ est acyclique. Puisque $Gr_i^F Gr_i^G M^* = F_i M^*$ si $i = \min \{i: F_i M^* \neq 0\}$ (ce qui existe localement), l'assertion résulte par récurrence sur i , en remplaçant (M^*, F) par $(M^*/G_i M^*, F)$.

2.1.12. Proposition. Soit $\star = b, +, -$ ou ∞ comme dans 2.1.8.

(1) Le foncteur $\oplus$ (cf. 2.1.1) induit les équivalences de catégories:

$$D^\star F(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} D^\star G(\mathcal{B}), \quad D^\star F_i(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} D^\star G_i(\mathcal{B}), \quad D^\star F_i^f(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} D^\star G_i^f(\mathcal{B}).$$

(2) Les foncteurs naturels:

$$D^\star F_i(\mathcal{D}_X) \rightarrow D^\star F(\mathcal{D}_X), \quad D^\star G_i(\mathcal{B}) \rightarrow D^\star G(\mathcal{B})$$

sont des équivalences de catégories.

(3) Les foncteurs naturels:

$$D^\star F_i^f(\mathcal{D}_X) \rightarrow D^\star F_i(\mathcal{D}_X), \quad D^\star G_i^f(\mathcal{B}) \rightarrow D^\star G_i(\mathcal{B})$$

sont pleinement fidèles.

Preuve. Les assertions (1) et (2) résultent de 2.1.4, 2.1.7 et de [31]. Prouvons l'assertion (3). Soit $(M_2^*, F) \rightarrow (M_1^*, F)$ un quasi-isomorphisme filtré avec $(M_2^*, F) \in K^*F_i(\mathcal{D}_X)$ et $(M_1^*, F) \in K^*F_i^f(\mathcal{D}_X)$, alors il suffit de montrer qu'il existe un quasi-isomorphisme filtré: $(M_3^*, F) \rightarrow (M_2^*, F)$ avec $(M_3^*, F) \in K^*F_i^f(\mathcal{D}_X)$. Soit $X = \bigcup_i U_i$ un recouvrement localement fini de X , tel que

$$\min \{p: G_p M_1^* = M_1^*\}$$

existe sur chaque U_i . Soient $U_I = \bigcap_{i \in I} U_i$, $j_I: U_I \rightarrow X$ l'inclusion naturelle, et

$$p(I) = \min \{p: G_p M_I^*|_{U_I} = M_1^*|_{U_I}\}.$$

On définit (M_3^*, F) par le complexe simple associé au complexe double de Čech dont la composante de degré (k, l) est

$$\bigoplus_{1-|I|=k} (j_I)_! j_I^{-1} (G_{p(I)} M_2^I, F),$$

où la différentielle de Čech est induite par le morphisme naturel:

$$(j_I)_! j_I^{-1} (G_{p(I)} M_2, F) \rightarrow (j_{I'})_! j_{I'}^{-1} (G_{p(I')} M_2, F)$$

pour $I \supset I'$. On a alors un morphisme naturel: $(M_3^*, F) \rightarrow (M_2^*, F)$, ce qui est un quasi-isomorphisme filtré d'après 2.1.11; d'où l'assertion.

2.1.13. Remarque. La preuve de l'assertion (3) montre que la catégorie $D^\star F_i^f(\mathcal{D}_X)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $D^\star F_i(\mathcal{D}_X)$ des objets

(M^*, F) satisfaisant la condition :

(2.1.13.1) $Gr^F Gr_i^G(M^*, F)$ est acyclique pour $i \gg 0$ localement sur X .

2.1.14. Lemme. *Soit*

$$DF_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)^\star = DF_i^{(f)}(\mathcal{D}_X) \cap DF(\mathcal{D}_X)^\star \quad \text{dans} \quad DF(\mathcal{D}_X),$$

cf. 2.1.9, alors le foncteur naturel :

$$D^\star F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X) \rightarrow DF_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)^\star$$

est une équivalence de catégories.

Preuve. Il suffit de vérifier que ce foncteur est essentiellement surjectif. D'après le remarque ci-dessus, on peut remplacer la condition (2.1.10.1) par la condition cohomologique (2.1.13.1) dans la définition de $D^\star F_i^f(\mathcal{D}_X)$; donc il suffit de montrer la surjectivité essentielle de $D^\star F_i^f(\mathcal{D}_X) \rightarrow DF_i^f(\mathcal{D}_X)^\star$; mais la première catégorie est équivalente à $D^\star F(\mathcal{D}_X)$ et la deuxième est contenue dans $DF(\mathcal{D}_X)^\star$, donc l'assertion résulte de 2.1.9.

2.1.15. Soit $D_{\text{coh}}^\star F_i^f(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie triangulée pleine de $D^\star F_i^f(\mathcal{D}_X)$ des objets (M^*, F) satisfaisant la condition :

(2.1.15.1) $\mathcal{H}^i Gr_i^F Gr_i^G M^*$ sont des $\mathcal{O}_X$ -Modules cohérents pour tout i, j . Notons que la différentielle de $Gr_i^F Gr_i^G M^*$ est $\mathcal{O}_X$ -linéaire et que $Gr_i^G(M^*, F) \cong Gr_i^F Gr_i^G M^* \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X, F[i])$ comme complexes de $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés induits. Soit $D_{\text{coh}}^\star G(\mathcal{B})$ la sous-catégorie triangulée pleine de $D^\star G(\mathcal{B})$ des objets M^* satisfaisant la condition :

(2.1.15.2) $\mathcal{H}^j M^*$ sont des $\mathcal{B}$ -Modules gradués cohérents pour tout j . Posons $D_{\text{coh}}^\star F(\mathcal{D}_X) = \bigoplus^{-1} (D_{\text{coh}}^\star G(\mathcal{B}))$, alors cette catégorie contient la catégorie $D_{\text{coh}}^\star F_i^f(\mathcal{D}_X)$ (par récurrence en utilisant la filtration G).

2.1.16. Proposition. *Soit $\star = b$, alors les foncteurs naturels :*

$$D_{\text{coh}}^b F_i^f(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\oplus} D_{\text{coh}}^b G(\mathcal{B})$$

sont des équivalences de catégories.

Preuve. Puisque toutes les catégories sont des sous-catégories triangulées pleines de $DG(\mathcal{B})$, il suffit de montrer que tout $\mathcal{B}$ -Module gradué cohérent M^* appartient essentiellement à $\bigoplus (D_{\text{coh}}^b F_i^f(\mathcal{D}_X))$. Par la preuve de la proposition 2.1.12, on peut remplacer la condition (2.1.10.1) imposée sur les objets de

$D_{\text{coh}}^b F_i^f(\mathcal{D}_X)$ par la condition cohomologique (2.1.13.1); donc l'assertion est locale d'après 2.1.11, car on a construit une résolution canonique en 2.1.7. Localement on a une suite exacte: $0 \rightarrow K_* \rightarrow L_* \rightarrow M_* \rightarrow 0$, où $L_* = \bigoplus_{p \leq p_0} M_p \otimes \mathcal{B}(p)$; donc l'assertion est réduite au cas $M_* = \bigoplus (M, F)$ avec $\text{Gr}^F M$ cohérent sur $\text{Gr}^F \mathcal{D}_X$, et cela résulte du lemme suivant.

2.1.17. Lemme. *Soit $(M, F) \in MF(\mathcal{D}_X)$ tel que $\text{Gr}^F M$ est un $\text{Gr}^F \mathcal{D}_X$ -Module cohérent. On a alors localement une résolution: $(L^*, F) \rightarrow (M, F)$ de longueur $\leq 2d_X$ par des Modules induits libres de type fini, i.e. $(L^j, F) = \bigoplus_p L_p^j \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X, F[p])$ avec L_p^j un $\mathcal{O}_X$ -Module libre de type fini, où $L_p^j = 0$ sauf un nombre fini de p .*

Preuve. Localement on a une résolution: $(L^*, F) \rightarrow (M, F)$ avec (L^j, F) induit libre de type fini d'après le théorème A de Cartan. Poson

$$(K, F) = \text{Ker}((L^{-2d_X+1}, F) \rightarrow (L^{-2d_X+2}, F)),$$

alors il suffit de montrer que (K, F) est un Module induit libre de type fini. Puisque $C((L^*, F) \rightarrow (M, F))$ est strict, on a

$$\text{Gr}^F K = \text{Ker}(\text{Gr}^F L^{-2d_X+1} \rightarrow \text{Gr}^F L^{-2d_X+2}).$$

D'autre part, $\mathcal{E} \mathcal{L}_{\text{Gr}^F \mathcal{D}}^i(\text{Gr}^F K, N) = \mathcal{E} \mathcal{L}_{\text{Gr}^F \mathcal{D}}^{i+2d_X}(\text{Gr}^F M, N) = 0$ pour $i > 0$ et pour tout $\text{Gr}^F \mathcal{D}_X$ -Module gradué N . On en conclut que $\text{Gr}^F K$ est un facteur direct gradué de $\text{Gr}^F L^{-2d_X+1}$ (localement), donc par le lemme de Nakayama (gradué), $\text{Gr}^F K$ (et donc (K, F)) est libre de type fini (quitte à se restreindre à un ouvert); d'où l'assertion. Ce qui achève la démonstration de 2.1.16.

2.1.18. Lemme. *Soient X une variété complexe lisse, et U un sous-ouvert de Stein de X , tel que $\bar{U}$ soit compact. Soit $(M, F) \in MF(\mathcal{D}_X)$ tel que $\text{Gr}^F M$ soit cohérent sur $\text{Gr}^F \mathcal{D}_X$. On a alors $H^i(U, DR(M)) = 0$ pour $i > 0$, où $DR(M) = M \otimes_{\mathcal{D}}^L \mathcal{O}$.*

Preuve. Soit $(L^*, F) \rightarrow (M, F)$ la résolution canonique de 2.1.6, alors $\text{Gr}^F \text{Gr}_p^G L^*$ sont acycliques sur $\bar{U}$ pour $p \gg 0$ d'après 2.1.11 et 2.1.17, donc $G_p(L^*, F)|_{\bar{U}} \rightarrow (M, F)|_{\bar{U}}$ est un quasi-isomorphisme filtré pour $p \gg 0$. Puisque $DR(G_p L^j) \cong G_p L^j \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{O}$ sont des $\mathcal{O}_X$ -Modules cohérents, l'assertion résulte du théorème B de Cartan.

2.1.19. Remarque. Ce lemme correspond à un résultat d'Artin, cf. [1].

2.1.20. Remarque. Si X n'est pas lisse, on peut définir $DF(\mathcal{D}_X)$, etc. comme suit. On prend un recouvrement localement fini $X = \bigcup U_i$ avec des immer-

sions fermées $U_i \rightarrow V_i$, où V_i sont lisses. Posons $U_I = \bigcap_{i \in I} U_i$ et $V_I = \prod_{i \in I} V_i$. Soient $i_I: U_I \rightarrow V_I$ les inclusions et $pr_{IJ}: V_J \rightarrow V_I$ les projections ($I \subset J$). Alors les objets de $MF(\mathcal{D}_X)$ sont les familles d'objets (M_I, F) de $MF(\mathcal{D}_{V_I})$ munis d'isomorphismes:

$$u_{IJ}: (pr_{IJ})_*(M_J, F) \cong (M_I, F) \quad \text{sur } V_I \setminus (U_I \setminus U_J),$$

tels que chaque $Gr_p^F M_I$ soit annulé par l'Idéal de U_I , et que u_{IJ} satisfassent les relations: $u_{IK} = u_{IJ} \circ (pr_{IJ})_* u_{JK}$ sur $V_I \setminus (U_I \setminus U_K)$. (Notons que cette définition est indépendante du choix de U_i, V_i .) On définit $DF(\mathcal{D}_X)$, etc. comme dans 2.1.8, etc.

2.2. Foncteur de de Rham et complexes filtrés différentiels

2.2.1. Soit $M_i(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $M(\mathcal{D}_X)$ des Modules induits, i.e. les objets de $M_i(\mathcal{D}_X)$ sont les $\mathcal{D}_X$ -Modules isomorphes à $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_X$ pour des $\mathcal{D}_X$ -Modules L . On définit le foncteur de de Rham

$$DR: M_i(\mathcal{D}_X) \rightarrow M(\mathbf{C}_X)$$

par

$$DR(M) = M \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{O}_X,$$

donc on a l'isomorphisme canonique: $DR(M) = L$ si $M = L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_X$. Ici $M(A)$ signifie la catégorie des A-Modules pour $M = \mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X$ ou $\mathbf{C}_X$, etc.

2.2.2. Lemme. Soit $M_j \in M_i(\mathcal{D}_X)$ ($j=1, 2$), alors le morphisme:

$$(2.2.2.1) \quad DR: \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M_1, M_2) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(DR(M_1), DR(M_2))$$

est injectif.

Preuve. On peut supposer que $M_j = L_j \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_X$. Soit $(x_1, \dots, x_d)$ un système de coordonnées locales de X . Si $\phi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(L_1, M_2) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M_1, M_2)$ n'est pas nul, il existe $m \in L_1$ tel que $\phi(m) \neq 0$. Posons

$$\phi(m) = \sum_{\nu} u_{\nu} \otimes \partial^{\nu} \quad \text{avec } u_{\nu} \in L_2 \quad (\nu \in \mathbf{Z}^d),$$

où $\partial^{\nu} = \prod \partial_i^{\nu_i}$ avec $\partial_i = \partial / \partial x_i$. Soit

$$i = \min \{ |\nu| : u_{\nu} \neq 0 \} \quad \text{où } |\nu| = \sum \nu_i,$$

on prend $\mu \in \mathbf{Z}^d$ tel que $|\mu| = i$ et que $u_{\mu} \neq 0$, alors

$$\phi(mx^{\mu}) \sum u_{\nu} \otimes \partial^{\nu} x^{\mu} \equiv \mu! u_{\mu} \pmod{L_2 \otimes (\sum \mathcal{D} \partial_i)}$$

donc $(DR\phi)(mx^{\mu}) = \mu! u_{\mu} \neq 0$; d'où l'assertion.

2.2.3. Soient L_1 et L_2 des $\mathcal{O}_X$ -Modules, alors $\mathcal{H}om_{\text{Diff}}(L_1, L_2)$ le groupe des morphismes différentiels est l'image du monomorphisme (2.2.2.1) pour $M_j = L_j \otimes \mathcal{D}_X$ (donc $L_j = DR(M_j)$) ($j=1, 2$). Puisque $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M_1, M_2)$ est muni de la filtration (pas nécessairement exhaustive):

$$F_p = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(L_1, L_2 \otimes F_p \mathcal{D}_X),$$

$\mathcal{H}om_{\text{Diff}}(L_1, L_2)$ est muni de la filtration F par le foncteur DR . On dit qu'un morphisme différentiel est d'ordre $\leq p$ s'il appartient à $F_p \mathcal{H}om_{\text{Diff}}(L_1, L_2)$.

2.2.4. Soit (L_j, F) un $\mathcal{O}_X$ -Module filtré tel que $F_p L_j = 0$ pour $p \ll 0$ localement sur X ($j=1, 2$), alors $\mathcal{H}om_{\text{Diff}}((L_1, F), (L_2, F))$ le groupe des morphismes différentiels filtrés est le sous-groupe de $\mathcal{H}om_{\text{Diff}}(L_1, L_2)$, qui consiste en les morphismes ϕ satisfaisant la condition:

(2.2.4.1) la composition $F_p L_1 \xrightarrow{\phi} L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_2 / F_{p-q-1} L_2$ est d'ordre $\leq q$ pour tout p, q .

Notons que cette condition entraîne que $\phi(F_p L_1) \subset F_p L_2$ (pour $q = -1$) et que $Gr^F \phi: Gr_p^F L_1 \rightarrow Gr_p^F L_2$ est $\mathcal{O}_X$ -linéaire (pour $q=0$).

Soit $MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ la catégorie additive dont les objets sont les $\mathcal{O}_X$ -Modules filtrés (L, F) tels que $F_p L = 0$ pour $p \ll 0$ localement sur X , et dont les morphismes sont les morphismes différentiels filtrés. Soit $MF^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ la sous-catégorie pleine de $MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ des objets satisfaisant la condition:

(2.2.4.2) $F_p L = L$ pour $p \gg 0$ localement sur X .

2.2.5. Lemme. Soient $(L_j, F) \in MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ et $(M_j, F) = (L_j, F) \otimes (\mathcal{D}_X, F)$ ($j=1, 2$), alors le foncteur DR induit l'isomorphisme:

(2.2.5.1) $DR: \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}((M_1, F), (M_2, F)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\text{Diff}}((L_1, F), (L_2, F)).$

Preuve. Soient $\phi \in \mathcal{H}om_{\text{Diff}}(L_1, L_2)$ et $\psi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M_1, M_2)$ tels que $\phi = DR(\psi)$, alors il suffit de vérifier que

$$\phi \in \mathcal{H}om_{\text{Diff}}((L_1, F), (L_2, F)) \quad \text{sii} \quad \psi(F_i L_1) \subset \sum_j F_{i-j} L_2 \otimes F_j \mathcal{D}_X \quad \text{pour tout } i.$$

Mais la première condition équivaut à

$$\psi(F_i L_1) \subset L_2 \otimes F_j \mathcal{D}_X + F_{i-j-1} L_2 \otimes \mathcal{D}_X \quad \text{pour tout } i, j,$$

cf. (2.2.4.1); d'où l'assertion.

2.2.6. Corollaire. On a l'équivalence de catégories:

$$DR^{-1}: MF^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \xrightarrow{\sim} MF_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)$$

telle que $DR^{-1}(L, F) = (L, F) \otimes (\mathcal{D}_X, F)$ et que

$$DR^{-1}: \text{Hom}_{\text{Diff}}((L_1, F), (L_2, F)) \rightarrow (\text{Hom}_{\mathcal{D}}(DR^{-1}(L_1, F), DR^{-1}(L_2, F)))$$

est l'inverse de (2.2.5.1).

Remarque. On a un quasi-inverse DR de DR^{-1} , si on choisit un isomorphisme $(M, F) \simeq (L, F) \otimes (\mathcal{D}_X, F)$ pour tout $(M, F) \in MF_i(\mathcal{D}_X)$.

2.2.7. Soit $(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} A^{-*} \Theta_X, F) \rightarrow (\mathcal{O}_X, F)$ comme dans 2.1.5. Soit $(M, F) \in MF(\mathcal{D}_X)$. Posons

$$\widetilde{DR}(M, F) = (M, F) \otimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} A^{-*} \Theta_X, F).$$

Alors par l'isomorphisme canonique:

$$(\widetilde{DR}(M, F))^i = (M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (A^{-i} \Theta_X, F),$$

(où la filtration F sur $A^{-i} \Theta_X$ est définie par $Gr_p^F = 0$ pour $p \neq -i$), $(\widetilde{DR}(M, F))^i$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X$ -Module, donc c'est un objet de $MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$. Notons que $\widetilde{DR}(M)$ est localement isomorphe au complexe de Koszul

$$K(M; \partial_i (1 \leq i \leq d_X)) [d_X].$$

2.2.8. Lemme. Avec les notations ci-dessus, $\widetilde{DR}(M, F)$ est un complexe de $MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ (par la structure de $\mathcal{O}_X$ -Module définie ci-dessus), tel que $DR^{-1}(\widetilde{DR}(M, F))$ est canoniquement isomorphe au premier complexe de (2.1.6.1).

Preuve. Soient les notations comme dans la preuve de 2.1.6, e.g. $L = A^{-i} \Theta_X$, alors par l'isomorphisme (2.1.6.2), $(M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X \otimes L, F[-i])$ est un Module induit dont l'image par le foncteur DR est munie d'une structure de $\mathcal{O}_X$ -Module et isomorphe à $(M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (L, F[-i])$. On vérifie facilement que la différentielle de $\widetilde{DR}(M)$ coïncide avec celle de l'image du premier complexe de (2.1.6.1) par le foncteur DR (par les isomorphismes ci-dessus), car ces deux complexes sont localement isomorphes au complexe de Koszul $K(M; \partial_i (1 \leq i \leq d_X)) [d_X]$ si on choisit un système de coordonnées locales (l'assertion pour le deuxième complexe résulte aussi de 2.4.2); ce qui achève la démonstration.

2.2.9. Soit $\star = b, +, -$ ou ∞ . On définit

$$\begin{aligned} C^{\star} F^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff}), \quad K^{\star} F^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff}), \\ D^{\star} F^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff}), \quad DF^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff})^{\star}, \end{aligned}$$

comme dans 2.1.9, en remplaçant $MF(\mathcal{D}_X)$ par $MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ (ou $MF^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$). Notons que

$$\mathcal{H}^* Gr_i^F: K^* F^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow M(\mathcal{O}_X)$$

sont des foncteurs cohomologiques. Soit $D_{\text{coh}}^* F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ la sous-catégorie pleine de $D^* F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ des objets cohomologiquement cohérents (i.e. l'image par $\mathcal{H}^i Gr_i^F$ est un $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent pour tout i, j .) Notons que

$$(L^*, F) \in D_{\text{coh}}^* F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \quad \text{sii} \quad DR^{-1}(L^*, F) \in D_{\text{coh}}^* F^f(\mathcal{D}_X),$$

cf. 2.1.15.

2.2.10. Proposition. *Avec les notations de 2.1.9, 2.1.10, 2.1.15 et 2.2.9, le foncteur DR^{-1} induit des équivalences de catégories:*

$$(2.2.10.1) \quad D^* F(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \simeq D^* F(\mathcal{D}_X)$$

$$(2.2.10.2) \quad DF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})^* \simeq DF(\mathcal{D}_X)^*$$

$$(2.2.10.3) \quad D^* F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \simeq D^* F_i^f(\mathcal{D}_X)$$

$$(2.2.10.4) \quad DF^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})^* \simeq DF_i^f(\mathcal{D}_X)$$

$$(2.2.10.5) \quad D_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \simeq D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X)$$

avec $\widetilde{DR}$ pour quasi-inverse.

Preuve. D'après 2.1.6 et 2.2.8, on a le quasi-isomorphisme filtré canonique:

$$(2.2.10.6) \quad DR^{-1}(\widetilde{DR}(M^*, F)) \xrightarrow{\sim} (M^*, F) \text{ pour } (M^*, F) \in KF(\mathcal{D}_X).$$

En l'appliquant à $(M^*, F) = DR^{-1}(L^*, F)$ pour $(L^*, F) \in KF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$, on obtient le morphisme canonique dans $KF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$:

$$(2.2.10.7) \quad \widetilde{DR}(DR^{-1}(L^*, F)) \rightarrow (L^*, F)$$

par la définition de DR^{-1} . On vérifie facilement que ce morphisme est un quasi-isomorphisme filtré. (On peut aussi utiliser le lemme 2.1.11.) Puisque

$$DR^{-1}(KF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})^*) \subset KF(\mathcal{D}_X)^*$$

$$\widetilde{DR}(KF(\mathcal{D}_X)^*) \subset KF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})^*$$

on obtient les assertions (2.2.10.1–4). La dernière résulte de 2.1.16.

2.2.11. Remarque. On peut définir (comme Du Bois, *Bull. Soc. math. France*, 109) les catégories:

$$K^* F_1(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \quad \text{et} \quad D^* F_1(\mathcal{O}_X, \text{Diff}), \text{ etc.}$$

en supposant que les différentielles (resp. les morphismes et les homotopies) de complexes sont d'ordre ≤ 1 (resp. 0); alors le foncteur $\widetilde{DR}$ se factorise par $D^*F_1(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow D^*F(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$, mais le morphisme (2.2.10.7) n'est pas défini dans $K^*F_1(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$. Je ne sais si le foncteur naturel:

$$D^*F_1(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow D^*F(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$$

est fidèle.

2.3. Foncteur image directe

2.3.1. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés complexes lisses. On définit les catégories:

$$MF(\mathcal{D}_X)_f, D^*F(\mathcal{D}_X)_f, D^*F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)_f, \text{ etc.}$$

et

$$MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f, D^*F(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f, \text{ etc.}$$

comme dans 2.1 et 2.2, en remplaçant la condition: "localement sur X " par "localement rel. à Y ". Donc $MF(\mathcal{D}_X)_f = MF(\mathcal{D}_X)$ etc., si f est propre. En général on peut vérifier que $DF(\mathcal{D}_X)_f$ est une sous-catégorie pleine de $DF(\mathcal{D}_X)$ par un argument dual de la preuve de 2.1.12 (i.e. on utilise $(j_I)_* j_I^{-1}(M_2^*/F_{p(I)} M_2^*, F)$ avec $p(I) = \max\{p: j_I^{-1} F_p M_1 = 0\}$, où $U_I = f^{-1}f(U_I)$). Puisque tous les résultats de 2.1 et de 2.2 (sauf 2.1.16 et (2.2.10.5)) restent valables en remplaçant $D^*F(\mathcal{D}_X)$, $D^*F(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$, etc. par $D^*F(\mathcal{D}_X)_f$, $D^*F(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f$, etc., on voit que $D^*F(\mathcal{D}_X)_f$, $D^*F_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)_f$, etc. (resp. $D^*F(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f$, etc.) sont des sous-catégories pleines de $DF(\mathcal{D}_X)$ (resp. $DF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$).

2.3.2. Avec les notations de 2.3.1, on définit $D^*F(f^{-1}\mathcal{D}_Y)_f$, $D^*F_i^{(f)}(f^{-1}\mathcal{D}_Y)_f$, etc. comme ci-dessus, en remplaçant respectivement $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{O}_X$ par $f^{-1}\mathcal{D}_Y$ et $f^{-1}\mathcal{O}_Y$.

Soit $(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y}, F) = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\mathcal{D}_Y, F)$. On définit le foncteur $DR_{X/Y}: MF_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)_f \rightarrow MF_i^{(f)}(f^{-1}\mathcal{D}_Y)_f$ par

$$DR_{X/Y}(M, F) = (M, F) \otimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{D}_{X \rightarrow Y}, F).$$

Donc, si $(M, F) \simeq (L, F) \otimes (\mathcal{D}_X, F)$, on a

$$\begin{aligned} DR_{X/Y}(M, F) &:= (M, F) \otimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{D}_{X \rightarrow Y}, F) \\ &\simeq (L, F) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} (f^{-1}\mathcal{D}_Y, F). \end{aligned}$$

Le foncteur $DR_{X/Y}$ induit les foncteurs:

$$DR_{X/Y}: KF_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)_f \rightarrow KF_i^{(f)}(f^{-1}\mathcal{D}_Y)_f$$

et

$$DR_{X/Y}: DF_i^{(f)}(\mathcal{D}_X)_f \rightarrow DF_i^{(f)}(f^{-1}\mathcal{D}_Y)_f$$

d'après 2.1.11.

2.3.3. Avec les notations ci-dessus, soit (M, F) un faisceau filtré sur X tel que $\bigcup_p F_p M = M$. On définit son *image directe topologique* par $f_*(M, F) = (\bigcup_p f_* F_p M, F)$ avec $F_p(f_*(M, F)) = f_* F_p M$. Alors ce foncteur image directe topologique filtrée f_* induit le foncteur:

$$f_*: MF_i^{(f)}(f^{-1}\mathcal{D}_Y)_f \rightarrow MF_i^{(f)}(\mathcal{D}_Y).$$

Puisque la dimension topologique stricte de X est finie [33], ce foncteur f_* se dérive en

$$f_*: D^*F_i^{(f)}(f^{-1}\mathcal{D}_Y)_f \rightarrow D^*F_i^{(f)}(\mathcal{D}_Y)$$

d'après le lemme suivant:

2.3.4. Lemme. Soit $\mathcal{G}^0$ le foncteur exact qui associe le faisceau des sections discontinues. Soit $(M, F) = (L, F) \otimes (f^{-1}\mathcal{D}_Y, F) \in MF_i^{(f)}(f^{-1}\mathcal{D}_Y)$. Alors le morphisme canonique

$$(\mathcal{G}^0(L, F)) \otimes (f^{-1}\mathcal{D}_Y, F) \rightarrow \mathcal{G}^0((L, F) \otimes (f^{-1}\mathcal{D}_Y, F))$$

est un isomorphisme filtre, ou $\mathcal{G}^0(M, F) = (\bigcup_p \mathcal{G}^0 F_p M, F)$ pour un faisceau filtré (M, F) .

(C'est clair.)

Remarque. Pour définir le foncteur dérivé f_* , il suffit de construire une résolution finie, canonique et fonctorielle: $(M, F) \rightarrow (L^*, F)$ pour $(M, F) \in MF_i^{(f)}(f^{-1}\mathcal{D}_Y)_f$, telle que chaque $Gr_p^F L^j$ soit f_* -acyclique (mais L^j n'est pas nécessairement f_* -acyclique.) De même, on peut définir le foncteur $f_!$.

2.3.5. On définit le foncteur image directe f_* par la composition:

$$DF(\mathcal{D}_X)_f \xrightarrow{DR^- \circ \widetilde{DR}} DF_i(\mathcal{D}_X)_f \xrightarrow{f_*} DF_i(\mathcal{D}_Y) \simeq DF(\mathcal{D}_Y).$$

Si f est propre ce foncteur induit:

$$f_*: D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_Y)$$

d'après 2.1.16 et par le théorème de Grauert.

2.3.6. Lemme. Avec les notations de 2.3.1, le foncteur image directe

topologique filtrée f_* (cf. 2.3.3) induit le foncteur :

$$f_*: MF^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f \rightarrow MF^{(f)}(\mathcal{O}_Y, \text{Diff})$$

(i.e. les morphismes différentiels filtrés sont stables par image directe topologique), de plus le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} MF^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f & \xrightarrow{f_*} & MF^{(f)}(\mathcal{O}_Y, \text{Diff}) \\ DR_X^{-1} \downarrow & & \downarrow DR_Y^{-1} \\ MF^{(f)}(\mathcal{D}_X)_f & \xrightarrow{f_*} & MF^{(f)}(\mathcal{D}_Y) . \end{array}$$

Preuve. Par définition, on a l'isomorphisme canonique :

$$f_*(DR_X^{-1}(L, F)) \simeq DR_Y^{-1}(f_*(L, F))$$

pour $(L, F) \in MF^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f$, donc par la définition de DR_Y^{-1} , il suffit de vérifier que, pour $\phi: (L_1, F) \rightarrow (L_2, F)$ un morphisme de $MF^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f$, on a

$$DR_Y(f_*(DR_X^{-1}(\phi))) = f_*(\phi): f_*(L_1, F) \rightarrow f_*(L_2, F) .$$

Soit $\psi = DR_X^{-1}(\phi)$, alors

$$DR_Y(f_*(\psi)) = DR_Y(f_*(DR_{X/Y}(\psi))) = f_*(f^{-1}DR_Y(DR_{X/Y}(\psi))) ,$$

où $f^{-1}DR_Y$ est le foncteur défini par $\otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{O}_Y$; donc il suffit de vérifier que

$$f^{-1}DR_Y(DR_{X/Y}(\psi)) = DR_X(\psi): (L_1, F) \rightarrow (L_2, F) .$$

Soit $1_{X \rightarrow Y} = 1 \otimes 1 \in \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$. On a des décompositions canoniques :

$$L_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X = (L_2 \otimes 1) \oplus (L_2 \otimes \mathcal{D}_X \theta_X)$$

$$L_2 \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y = (L_2 \otimes 1) \oplus (L_2 \otimes f^{-1}\mathcal{D}_Y \theta_Y)$$

telles que $(L_2 \otimes 1) \otimes 1_{X \rightarrow Y} = L_2 \otimes 1$ et que $(L_2 \otimes \mathcal{D}_X \theta_X) \otimes 1_{X \rightarrow Y} \subset L_2 \otimes f^{-1}\mathcal{D}_Y \theta_Y$ par l'isomorphisme canonique :

$$(L_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} = L_2 \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y ;$$

ce qui entraîne l'assertion.

2.3.7. Avec les notations ci-dessus, les foncteurs $\mathcal{J}^0$ et $\mathcal{J}^0/\text{id}$ induisent les foncteurs de $MF^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f$ dans elle-même d'après 2.3.4, et on obtient une résolution finie, canonique et fonctorielle: $(M, F) \rightarrow (L^*, F)$ telle que chaque $Gr_p^F L^j$ soit f_* -acyclique; donc le foncteur image directe topologique

filtrée f_* se dérive en

$$f_*: D^{\star}F^{(f)}(\mathcal{O}_X, \text{Diff})_f \rightarrow D^{\star}F^{(f)}(\mathcal{O}_Y, \text{Diff})$$

(et $f_*: D_{\text{coh}}^{\star}F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow D_{\text{coh}}^{\star}F^f(\mathcal{O}_Y, \text{Diff})$ si f est propre)

de sorte que $DR_Y^{-1} \circ f_* = f_* \circ DR_X^{-1}$, cf. 2.3.6. Notons que f_* commute au foncteur naturel: $DF(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow D(\mathcal{C}_X)$, si f est propre.

Pour $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$, on a canoniquement $(gf)_* = g_* f_*$ par définition, donc c'est valable pour les images directes de complexes de $\mathcal{D}$ -Modules filtrés.

2.3.8. Remarques.

(1) Pour un complexe de $\mathcal{D}_X$ -Modules M^* on définit usuellement:

$$\int_f M^* = Rf_*(M^* \otimes_{\mathcal{D}_X}^L \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}),$$

mais on n'a pas en général $\int_{gf} = \int_g \int_f$, e.g. posons $X = \mathbb{C}$, $Y = \{0\}$, $Z = \mathbb{C}$, $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ avec $|a_i| \rightarrow \infty$, $M = \bigoplus_i \mathcal{B}_{\{a_i\}|X}$ avec $\mathcal{B}_{\{a_i\}|X} = \mathcal{D}_X / (x - a_i) \mathcal{D}_X$, où x est la coordonnée de X .

En particulier, en oubliant la filtration, $f_*(M^*, F)$ ne coïncide pas avec $\int_f M^*$. Mais ils coïncident, si la condition suivante est vérifiée:

Il existe un sous-ensemble Z de X , propre sur Y , tel que

$Gr_p^Y DR_{X/Y}(M^*, F)|_{X \setminus Z}$ soit acyclique pour $p \gg 0$ localement rel. à Y .

Par exemple, soit $M = \mathcal{Q}_X^{\mathbb{Z}} x$ avec $Gr_p^F M = 0$ pour $p \neq -d_X$, alors, si f est lisse, $DR_{X/Y}(M, F) \simeq (\mathcal{Q}_{X/Y}^{\mathbb{Z}}, F)[d_X - d_Y]$ localement rel. à Y ; donc la condition ci-dessus est vérifiée, si $\text{Sing } f$ est propre.

(2) Le théorème B de Cartan pour les $\mathcal{D}$ -Modules n'est pas vrai en général, car $H^1(X, \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_X) \neq 0$ pour $X = \mathbb{C}$ (ou X est un polydisque). En effet, pour $\{a_i\}$ comme ci-dessus, considérons la suite exacte longue associée à:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{C}_{a_i} \rightarrow 0$$

2.3.9. Remarque. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre de variétés analytiques complexes (séparées), alors on peut définir $f_*: DF(\mathcal{D}_X) \rightarrow DF(\mathcal{D}_Y)$, etc., en utilisant un complexe de Čech associé aux recouvrements $X = \bigcup U_i$, $Y = \bigcup U'_i$ avec des immersions $U_i \rightarrow V_i$, $U'_i \rightarrow V'_i$ comme dans 2.1.20, tels qu'on ait des diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} U_i & \rightarrow & V_i \\ f \downarrow & & \downarrow f_i \\ U'_i & \rightarrow & V'_i \end{array}$$

On peut vérifier que f_* ne dépend pas de choix de U_i, V_i, U'_i, V'_i et de f_i .

2.4. Foncteur dual

2.4.1. Soit M un $\mathcal{D}_X$ -Module à droite, on a alors deux structures de $\mathcal{D}_X$ -Module à droite, notées r et t , sur $M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_X$, définies par :

$$\begin{aligned}(m \otimes P)r(g) &= m \otimes Pg, & (m \otimes P)r(\partial_i) &= m \otimes P\partial_i \\ (m \otimes P)t(g) &= mg \otimes P, & (m \otimes P)t(\partial_i) &= m\partial_i \otimes P - m \otimes \partial_i P\end{aligned}$$

pour $m \in M, P \in \mathcal{D}_X, g \in \mathcal{O}_X$ et $\partial_i = \partial/\partial x_i$

2.4.2. Lemme. Soit M un $\mathcal{D}_X$ -Module à droite, alors il existe une unique involution $\iota: M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_X \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_X$ identique sur $M \otimes 1$, qui échange les deux structures de $\mathcal{D}$ -Module à droite.

Preuve. On définit le morphisme $\iota: M \otimes \mathcal{D}_X \rightarrow M \otimes \mathcal{D}_X$ par

$$\iota(m \otimes P) = (m \otimes 1)t(P),$$

alors il suffit de vérifier que $\iota^2 = \text{id}$. Soit $\partial^\nu = \prod \partial_i^{\nu_i}$ pour $\nu \in \mathbb{N}^d$, posons $C(\mu, \nu) = \prod (\mu_i + \nu_i)! / \mu_i! \cdot \nu_i!$ pour $\mu, \nu \in \mathbb{N}^d$. On a alors

$$\begin{aligned}\iota^2(m \otimes \partial^\nu) &= \iota\left(\sum_{0 \leq \mu \leq \nu} (-1)^{|\mu|} C(\mu, \nu - \mu) m \partial^{\nu - \mu} \otimes \partial^\mu\right) \\ &= \sum_{0 \leq \lambda \leq \mu \leq \nu} (-1)^{|\mu| + |\lambda|} C(\mu, \nu - \mu) C(\lambda, \mu - \lambda) m \partial^{\nu - \lambda} \otimes \partial^\lambda \\ &= m \otimes \partial^\nu\end{aligned}$$

car $C(\mu, \nu - \mu)C(\lambda, \mu - \lambda) = C(\nu - \mu, \mu - \lambda)C(\lambda, \nu - \lambda)$; d'où l'assertion.

2.4.3. Soient (M, F) et (M', F) des $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés, on définit le faisceau filtré $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F((M, F), (M', F))$ dont la filtration F est exhaustive, par

$$F_p := \{\phi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M, M') : \phi(F_i M) \subset F_{p+i} M' \text{ pour tout } i\}.$$

(De même, pour des $\mathcal{O}_X$ -Modules filtrés.)

Soit $\omega_X[d_X] \rightarrow K_X^\bullet$ une résolution par des $\mathcal{D}_X$ -Modules, injectifs sur $\mathcal{O}_X$, telle que $K_X^i = 0$ pour $i < -d_X$, où $\omega_X = \mathcal{Q}_X^{d_X}(d_X)$, cf. (2.0.1-2). Alors $K_X \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)$ est un complexe de $\mathcal{D}_X$ -bi-Modules à droite filtrés, donc pour $(M^*, F) \in C^{-F}(\mathcal{D}_X)$, on définit

$$D(M^*, F) := \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F((M^*, F), K_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F))$$

où on peut utiliser au choix r ou t pour la structure de complexe de $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés sur $D(M^*, F)$ et l'autre pour $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F$ d'après 2.4.2.

Supposons que $(M, F) = (L, F) \otimes (\mathcal{D}_X, F)$ avec $(L, F) \in MF^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$, on a alors

$$(2.4.3.1) \quad (\mathbf{D}(M, F))^i = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}((L, F), (K_X^i, F)) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)$$

si on utilise t pour $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F$. (Ici la filtration F de K_X^i est triviale, i.e. $Gr_j^F K_X^i = 0$ pour $j \neq 0$.) On a donc $\mathbf{D}(M^*, F) \in C^+ F_i^f(\mathcal{D}_X)$ pour $(M^*, F) \in C^- F_i^f(\mathcal{D}_X)$.

2.4.4. Lemme. *Le foncteur dual $\mathbf{D}$ défini ci-dessus induit les foncteurs contravariants :*

$$\mathbf{D}: K^- F_i^f(\mathcal{D}_X) \rightarrow K^+ F_i^f(\mathcal{D}_X)$$

$$\mathbf{D}: D^- F_i^f(\mathcal{D}_X) \rightarrow D^+ F_i^f(\mathcal{D}_X)$$

(e.g. $\mathbf{D}(M^*, F)$ est acyclique filtré, si (M^*, F) l'est). Le dernier foncteur est indépendant du choix de K_X^* .

Preuve. D'abord on vérifie que le foncteur $\mathbf{D}$ conserve les équivalences d'homotopie. Puisque

$$Gr_j^F(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}^F((L, F), (K_X^i, F))) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(Gr_{-j}^F L, K_X^i),$$

on voit que

$$\begin{aligned} Gr_j^G(\mathbf{D}(M^*, F)) &\simeq \mathbf{D}(Gr_{-j}^G(M^*, F)) \\ &\simeq \mathbf{D}(Gr_{-j}^F Gr_{-j}^G M^* \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F[-j])), \end{aligned}$$

donc $\mathbf{D}(M^*, F)$ est acyclique filtré, si (M^*, F) l'est (d'après 2.1.11). Pour la dernière assertion, il suffit de vérifier que $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F((M^*, F), K^* \otimes (\mathcal{D}_X, F))$ est acyclique filtré pour $(M^*, F) \in K^- F_i^f(\mathcal{D}_X)$ et $K^* \in K^+(\mathcal{D}_X)$, si K^* est acyclique et si les K^j sont injectifs sur $\mathcal{O}_X$. Mais cela se voit par le même argument que ci-dessus (i.e. par le passage à Gr_j^F); d'où l'assertion.

2.4.5. Lemme. *Le foncteur $\mathbf{D}$ induit les foncteurs contravariants :*

$$\mathbf{D}: D_{\text{coh}}^b F_i^f(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{\text{coh}}^b F_i^f(\mathcal{D}_X)$$

$$\mathbf{D}: D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X).$$

Preuve. D'après 2.1.16, il suffit de vérifier la première. Par définition on a $\mathbf{D}(D_{\text{coh}}^b F_i^f(\mathcal{D}_X)) \subset D_{\text{coh}}^+ F_i^f(\mathcal{D}_X)^b$ (cf. 2.1 pour les notations), car $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^i(M, \omega_X[d_X]) = 0$ pour $i > 0$, si M est un $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent; alors l'assertion résulte de 2.1.14, car la condition (2.1.15.1) est cohomologique.

2.4.6. Remarques. (1) On peut définir

$$\mathbf{D}: D_{(\text{coh})} F_i^f(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{(\text{coh})} F_i^f(\mathcal{D}_X)$$

si on utilise le produit direct pour la définition de complexe simple associé. On peut aussi construire l'isomorphisme canonique :

$$D \circ D \xrightarrow{\sim} \text{id} \quad \text{sur} \quad D_{\text{coh}} F_i^f(\mathcal{D}_X).$$

(2) D'après V.D. Golovin (*Soviet Math. Dokl.* Vol. **16** (1975) p. 854), $\dim. \text{inj}_{\mathcal{O}} \omega_X \leq d_X$. Ce qui nous permet de prendre un complexe borné pour K_X^* dans 2.4.3; alors le lemme 2.4.5 et le remarque ci-dessus sont triviaux.

2.4.7. Soient $(L, F) \in MF^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ et $(L', F) \in MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$, on définit le faisceau filtré $\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), (L', F))$ dont la filtration F est exhaustive, par

$$F_p := \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), (L', F[-p])),$$

où les inclusions $F_p \rightarrow F_{p+1}$ sont définies par la composition avec les morphismes différentiels filtrés :

$$\text{id} : (L', F[-p]) \rightarrow (L', F[-p-1]),$$

cf. 2.2.4. D'après 2.2.5, on a l'isomorphisme canonique :

$$(2.4.7.1) \quad DR : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F((M, F), (M', F)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), (L', F))$$

où $(M, F) = DR^{-1}(L, F)$, etc. Puisque (M, F) et (M', F) sont munis d'une structure de $\mathcal{O}_X$ -Module associée au foncteur $\otimes_{\mathcal{O}}$ comme dans 2.4.1, les $\mathcal{C}$ -Modules filtrés de (2.4.7.1) sont munis d'une structure de $\mathcal{O}_X$ -bi-Module. (Notons que cette structure sur le deuxième est définie par la composition avec l'action de $\mathcal{O}_X$.) Désormais on n'utilisera que cette structure de $\mathcal{O}_X$ -Module associée à celle de (M', F) , car c'est reliée à la structure de $\mathcal{D}_X$ -Module sur $(D(M, F))^i$ dans le cas $(L', F) = (K_X^i, F)$. Par cette structure, on a :

$$\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), (L', F)) \in MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff}).$$

2.4.8. Lemme. Soient $(L^*, F) \in CF^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ et $(L'', F) \in CF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$, alors $F \mathcal{H}om_{\text{Diff}}((L^*, F), (L'', F))$ est un complexe double de $MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ par la structure de $\mathcal{O}_X$ -Module définie ci-dessus.

Preuve. La différentielle de (L^*, F) induit des morphismes différentiels filtrés (de degré 0) par (2.4.7.1), donc l'assertion résulte du lemme suivant :

2.4.9. Lemme. Soient $(L'', F) \in CF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ et $(M'', F) = DR^{-1}(L'', F)$. Alors (M'', F) est un complexe de $MF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ par la structure de $\mathcal{O}_X$ -Module associée à $\otimes_{\mathcal{O}}$. Pour $(L, F) \in MF^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$, on a

$$\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), (L'', F)) \in CF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$$

par la structure de $\mathcal{O}_X$ -Module définie dans 2.4.7.

Preuve. On a des isomorphismes canoniques comme $\mathcal{D}_X$ -bi-Modules filtrés :

$$((L^i, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F) \xrightarrow{\sim} (L^i, F) \otimes_{\mathcal{O}} ((\mathcal{D}_X, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F))$$

définis par $(u \otimes P) \otimes Q \mapsto u \otimes (P \otimes Q)$, où on utilise la structure de $\mathcal{D}_X$ -Module à gauche sur $\mathcal{D}_X$ pour définir $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_X$. Puisque le dernier terme est isomorphe à

$$((L^i, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)) \otimes_{\mathcal{D}} ((\mathcal{D}_X, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)),$$

on obtient un complexe de $MF_i(\mathcal{D}_X)$, dont l'image par le foncteur DR est isomorphe au complexe $DR^{-1}(L', F)$ par l'isomorphisme canonique défini ci-dessus; d'où la première assertion. Soit $(M, F) = DR^{-1}(L, F)$, alors

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F((M, F), (M'^i, F)) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F((M, F), (M'^i, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F))$$

comme $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés, donc on obtient un complexe de $MF_i(\mathcal{D}_X)$, dont l'image par DR est $\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), (L', F))$; d'où la dernière assertion. Ce qui achève la preuve de 2.4.8.

2.4.10. Lemme. Soient (L, F) et (L', F) comme dans 2.4.7, alors le quasi-isomorphisme filtré dans $CF(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$:

$$\widetilde{DR}(DR^{-1}(L', F)) \rightarrow (L', F), \text{ cf. (2.2.10.7)}$$

induit le quasi-isomorphisme filtré:

$$(2.4.10.1) \quad \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), \widetilde{DR}(DR^{-1}(L', F))) \rightarrow \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), (L', F)).$$

Preuve. Soit $(M, F) = DR^{-1}(L, F)$, etc., alors le premier terme de (2.4.10.1) est isomorphe à:

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F((M, F), DR^{-1}(\widetilde{DR}(M', F))) \\ & \simeq \widetilde{DR}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}^F((M, F), (M', F)) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)) \end{aligned}$$

car $DR^{-1}(\widetilde{DR}(M, F)) \simeq \widetilde{DR}(DR^{-1}(M, F))$, où on utilise 2.4.2. On vérifie que le morphisme (2.4.10.1) coïncide avec (2.2.10.7) appliqué à $F \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}((M, F), (M', F))$; d'où l'assertion.

2.4.11. Soit $(L^{\bullet}, F) \in C^{-F}(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$. Soit $(K_X^{\bullet}, F)$ comme dans 2.4.3. Alors par l'isomorphisme (2.4.3.1),

$$D(L^{\bullet}, F) := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}^F((L^{\bullet}, F), (K_X^{\bullet}, F))$$

est un complexe de $MF^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ tel que $DR^{-1}\mathbf{D}(L^\bullet, F) \simeq \mathbf{D}(DR^{-1}(L^\bullet, F))$. D'après 2.4.4 et 2.4.5, on obtient le foncteur contravariant

$$\mathbf{D}: D_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow D_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$$

compatible avec DR^{-1} . Puisque

$$(2.4.11.1) \quad \mathbf{D}(DR^{-1}(L^\bullet, F)) \simeq \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L^\bullet, F), (K_X^\bullet, F))$$

si on utilise r pour $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}$, on obtient l'isomorphisme canonique dans $D^+F(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$:

$$(2.4.11.2) \quad \mathbf{D}(L^\bullet, F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L^\bullet, F), (\tilde{K}_X^\bullet, F))$$

d'après (2.2.10.7), où $(\tilde{K}_X^\bullet, F) := \tilde{DR}(K_X^\bullet, F) \in C^+F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$. (Notons que $DR^{-1}(\tilde{K}_X^\bullet, F) \simeq \tilde{DR}((K_X^\bullet, F) \otimes (\mathcal{D}_X, F))$.)

Soit $\text{Forget}: DF(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow D(\mathcal{C}_X)$ le foncteur naturel, alors $\text{Forget}(\tilde{K}_X^\bullet, F) \simeq \mathcal{C}_X(d_X)[2d_X] \simeq a_X^! \mathcal{C}$. On définit le morphisme fonctoriel

$$(2.4.11.3) \quad \text{Forget}(\mathbf{D}(L^\bullet, F)) \rightarrow \mathbf{D}(\text{Forget}(L^\bullet, F))$$

par le morphisme canonique:

$$\text{Forget}(\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L^\bullet, F), (\tilde{K}_X^\bullet, F))) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\text{Forget}(L^\bullet, F), a_X^! \mathcal{C}).$$

Soit $D_{\text{hol}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ (resp. $D_{\text{hol}}^b F(\mathcal{D}_X)$) la sous-catégorie pleine de $D_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ (resp. $D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X)$) des objets $(L^\bullet, F)$ (resp. $(M^\bullet, F)$) tels que les $\mathcal{H}^i(DR^{-1}(L^\bullet))$ (resp. $\mathcal{H}^i(M^\bullet)$) soient des $\mathcal{D}_X$ -Modules holonomes pour tout i , alors cette sous-catégorie est stable par $\mathbf{D}$.

2.4.12. Proposition. *Avec les notations ci-dessus, le morphisme (2.4.11.3) est un isomorphisme pour $(L^\bullet, F) \in D_{\text{hol}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$, i.e. $\text{Forget} \circ \mathbf{D} \simeq \mathbf{D} \circ \text{Forget}$ sur $D_{\text{hol}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ et $(\text{Forget} \circ DR) \circ \mathbf{D} \simeq \mathbf{D} \circ (\text{Forget} \circ DR)$ sur $D_{\text{hol}}^b F(\mathcal{D}_X)$.*

Preuve. Soit $\tau_{\leq p}$ ($p \in \mathbf{Z}$) la filtration canonique [6, 1 II (1.4.6)] sur des complexes de $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés, telle que $\tau_{\leq p} \oplus = \oplus \tau_{\leq p}$, cf. 2.11. On a alors une filtration sur $\tilde{DR}(DR^{-1}(L^\bullet, F))$ par:

$$\tilde{DR}(\tau_{\leq p} DR^{-1}(L, F)) \quad (p \in \mathbf{Z}),$$

donc on peut supposer que $\mathcal{H}^i(\oplus DR^{-1}(L^\bullet F)) = 0$ pour $i \neq 0$. Puisque l'assertion est locale, on peut remplacer $(L^\bullet, F)$ par un complexe borné de $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés libres de type fini comme dans 2.1.17, par le même argument que dans la preuve le 2.1.16. On a alors

$$(2.4.12.1) \quad \mathbf{D}(L^*, F) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}^F((L^*, F), (\omega_X[d_X], F))$$

où la différentielle du deuxième complexe est définie comme dans 2.4.11. D'après Kashiwara [16], on a

$$\text{Forget}(L^*, F), \text{Forget}(\mathbf{D}(L^*, F)) \in D_c^b(\mathbf{C}_X).$$

Par le même argument que dans 2.4.11, on a

$$(2.4.12.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}(L^*, F) &\simeq \mathcal{H}om_{\mathbf{D}\text{diff}}^F((L^*, F), (\mathcal{Q}_X^\bullet(d_X)[2d_X], F)) \\ &\simeq DR(\widetilde{DR}^{-1}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}^F((L^*, F), (\omega_X[d_X], F)))) . \end{aligned}$$

Soient $x \in X$ et $i_x: \{x\} \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle. On définit le foncteur $i_x^!$ par

$$i_x^! A^* = \text{Hom}((i_x)_* \mathcal{Z}, \mathcal{G}(A^*))$$

pour un complexe de faisceaux A^* , où $\mathcal{G}(A^*)$ est le complexe simple associé au complexe double de la résolution canonique flasque tronquée de A^* . On a alors un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} i_x^* \mathcal{H}om_{\mathbf{D}\text{diff}}(L^*, \mathcal{Q}_X^\bullet(d_X)[2d_X]) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(i_x^! L^*, i_x^! \mathcal{Q}_X^\bullet(d_X)[2d_X]) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ i_x^* \mathcal{H}om_{\mathbf{D}\text{diff}}(L^*, \tilde{K}_X^\bullet) & & \\ \downarrow & & \\ i_x^* \mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(L^*, \tilde{K}_X^\bullet) & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(i_x^! L^*, i_x^! \tilde{K}_X^\bullet) \end{array}$$

Puisque $\text{Forget}(\mathbf{D}(L^*, F)) \simeq \mathcal{H}om_{\mathbf{D}\text{diff}}(L^*, \mathcal{Q}_X^\bullet(d_X)[2d_X])$ (car L^j sont cohérents), il suffit de vérifier que α est bijectif, car β est clairement bijectif, cf. par exemple [32]. Soit σ la filtration bête de L^* (cf. [6, II (1.4.7)]), alors elle induit une cofiltration (dont la filtration correspondante sera notée G) sur la source et le but de α , compatible avec α . D'après (2.4.12.1–2), $Gr_i^G \alpha$ s'écrit:

$$Gr_i^G \alpha: i_x^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(L^{-i}, \omega_X)[d_X] \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(H_{[i]}^{d_X} L^{-i}, \mathbf{C})[d_X].$$

Puisque le but de $Gr_i^G \alpha$ est isomorphe à

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(H_{[i]}^{d_X} L^{-i}, H_{[i]}^{d_X} \mathcal{Q}_X^\bullet(d_X)[2d_X]),$$

l'accouplement

$$\alpha'_i: i_x^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(L^{-i}, \omega_X) \times H_{[i]}^{d_X} L^{-i} \rightarrow \mathbf{C}$$

correspondant à $Gr_i^G \alpha$, est défini par le morphisme trace (ou le morphisme de résidu):

$$Tr: H_{\{x\}}^{d_X} \omega_X \rightarrow R\Gamma_{\{x\}}(\mathcal{O}_X(d_X)[2d_X]) \cong C.$$

(Notons que $\omega_X = \mathcal{O}_X^{d_X}(d_X)$ par définition, cf. (2.0.2).) Puisque les suites spectrales de G dégénèrent en E_2 , il suffit de vérifier que les $H^i Gr^c \alpha$ sont bijectifs. Par la dualité de Serre, les α'_i sont des accouplements topologiquement parfaits. Par les deux lemmes suivants, les différentielles des complexes $i_*^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(L^*, \omega_X)$ et $H_{\{x\}}^{d_X} L^*$ sont duales l'une de l'autre par cette dualité. Puisque $DL^* \in D_c^b(C_X)$, on obtient la dualité parfaite sur leurs cohomologies; d'où l'assertion (comparer à [16]).

2.4.13. Lemme. Soit $P \in \mathcal{H}om_{\text{Diff}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{D}_X$. Soit $P^*: \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_X, \omega_X) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_X, \omega_X)$ la transposé de P définie comme dans 2.4.11. Alors par l'isomorphisme canonique:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_X, \omega_X) \simeq \omega_X$$

P^* s'identifie à l'action de P à droite sur ω_X .

2.4.14. Lemme. Soit $\langle, \rangle: \omega_{X,x} \times H_{\{x\}}^{d_X} \mathcal{O}_X \rightarrow C$ l'accouplement comme ci-dessus, on a alors

$$\langle uP, v \rangle = \langle u, Pv \rangle$$

pour $u \in \omega_{X,x}$, $v \in H_{\{x\}}^{d_X} \mathcal{O}_X$ et $P \in \mathcal{D}_{X,x}$

(Les démonstrations de ces deux lemmes sont laissées au lecteurs.)

2.4.15. Remarques.

(1) La définition du foncteur dual sur $D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X)$ est compatible avec la définition usuelle, par le foncteur naturel: $D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$. De même le foncteur $\text{Forget} \circ DR: DF(\mathcal{D}_X) \rightarrow D(C_X)$ est compatible avec la définition usuelle de $DR: D(\mathcal{D}_X) \rightarrow D(C_X)$, par le foncteur naturel ci-dessus. Ici, le foncteur entre les catégories dérivées induit par $\widetilde{DR}$ est noté aussi DR .

(2) Soit $M_{\text{hol}}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -Modules holonomes, cf. [16]. Alors cette catégorie est stable par le foncteur dual (par sa compatibilité avec la microlocalisation). D'après Kashiwara [loc. cit], le foncteur DR induit le foncteur exact:

$$(2.4.15.1) \quad DR: M_{\text{hol}}(\mathcal{D}_X) \rightarrow \text{Perv}(C_X),$$

(voir [1] pour la définition de $\text{Perv}(C_X)$) car il a démontré la demi-perversité et la dualité parfaite:

$$(2.4.15.2) \quad i_*^* DR(DM) \times i_*^! DR(M) \rightarrow C$$

i.e. $i_x^* DR(\mathbf{DM}) \simeq i_x^* \mathbf{D}(DR(M))$, pour tout $i_x: \{x\} \hookrightarrow X$. Notons que le foncteur (2.4.15.1) est *exacte* et *fidèle*, car $DR(\mathrm{Im} u) = \mathrm{Im}(DR(u))$ pour un morphisme u de $M_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$, et $M=0$ si $DR(M)=0$ pour $M \in M_{\mathrm{hol}}^I(\mathcal{D}_X)$.

(3) Posons $\mathrm{Sol}(M) = \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M, \omega_X)[d_X]$ pour $M \in M_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$, alors on peut vérifier que

$$\mathrm{Sol}(M) \simeq DR(\mathbf{DM}).$$

Donc on obtient le foncteur $\mathrm{Sol}: M_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X) \rightarrow \mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$, et la dualité (2.4.15.2) s'exprime en

$$(2.4.15.3) \quad i_x^* \mathrm{Sol}(M) \simeq i_x^* \mathbf{D}(DR(M)).$$

D'après [18] (voir aussi [23]) on peut construire un isomorphisme global

$$(2.4.15.4) \quad \mathrm{Sol}(M) \simeq \mathbf{D}(DR(M)).$$

(Comparer à 2.4.12–14; dans [23] on remplace la dualité de Serre pour la cohomologie locale par cette dualité pour la cohomologie à supports compacts.)

2.4.16. Remarque. Avec les notations et les hypothèses de (2.4.3.1), soit $(x_1, \dots, x_{d_X})$ un système de coordonnées locales, alors $\phi \in (\mathbf{D}(M, F))^i$ s'écrit:

$$\sum_{\nu} \phi_{\nu} \otimes \partial^{\nu} \quad \text{avec} \quad \phi_{\nu} \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(L, K_X^{-i})$$

par l'isomorphisme (2.4.3.1); ce qui correspond à

$$[u \mapsto \sum_{\nu} \phi_{\nu}(u) \partial^{\nu}] \in \mathcal{H}om_{\mathrm{Diff}}(L, K_X^{-i}),$$

par l'isomorphisme (2.4.11.1).

2.5. Dualité pour un morphisme propre

2.5.1. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre de variétés complexes lisses. Soient (K_X^*, F) et $(\tilde{K}_X^*, F)$ comme dans 2.4.3 a et 2.4.11 (de même pour Y). Soit $\tilde{I}_X^*$ le complexe double des courants au sens de Schwartz, i.e. $\Gamma(U, \tilde{I}_X^*)$ s ont des sous-complexes doubles de $\mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(\Gamma_c(U, {}^{\infty}\mathcal{Q}_X^*), \mathbf{C})$ pour tout ouvert U , où ${}^{\infty}\mathcal{Q}_X^*$ est le complexe double des formes C^{∞} . Soit $\tilde{I}_X^*$ le complexe simple associé à $\tilde{I}_X^*$ soit I_X^* le complexe quotient de $\tilde{I}_X^*$ tel que $I_X^* = \tilde{I}_X^*$, alors $\omega_X[d_X] \xrightarrow{\sim} I_X^*$ et $DR(I_X^*) \xrightarrow{\sim} \tilde{I}_X^*$. On définit la filtration F sur I_X^* et $\tilde{I}_X^*$ comme sur K_X^* et $\tilde{K}_X^*$, cf. 2.4.3. et 2.4.11. (De même pour I_Y^* et $\tilde{I}_Y^*$)

Par définition de K_X^* , on peut supposer qu'il existe un quasi-isomorphisme $I_X^* \xrightarrow{\sim} K_X^*$, ce qui induit les quasi-isomorphismes filtrés:

$$(I_X^*, F) \xrightarrow{\sim} (K_X^*, F), \quad (\tilde{I}_X^*, F) \xrightarrow{\sim} (\tilde{K}_X^*, F).$$

(De même pour Y .)

Par le “push-down” des courants, on a le morphisme trace :

$$(2.5.1.1) \quad \text{Tr}_f: f_*(\tilde{I}_X^*, F) \rightarrow (\tilde{I}_Y^*, F)$$

dans $K_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_Y, \text{Diff})$. Donc on obtient le morphisme dans $K^+ F(\mathcal{D}_Y)$:

$$(2.5.1.2) \quad DR^{-1} f_*(\tilde{I}_X^*, F) \xrightarrow{DR^{-1}(\text{Tr})} DR^{-1}(\tilde{I}_Y^*, F) \rightarrow (I_Y^*, F) \rightarrow (K_Y^*, F)$$

d’après (2.2.10.6). Ici, on peut supposer que K_Y^i sont des $\mathcal{D}_Y$ -Modules injectifs. Puisque

$$(2.5.1.3) \quad DR^{-1} f_*(\tilde{I}_X^*, F) \rightarrow DR^{-1} f_*(\tilde{K}_X^*, F)$$

est un quasi-isomorphisme filtré, le morphisme (2.5.1.2) se factorise par (2.5.1.3) dans $K^+ F(\mathcal{D}_Y)$. (En effet, l’assertion est claire si on oublie la filtration; mais le morphisme et l’homotopie respectent la filtration car $F_{-1}=0$ et $F_0 K_Y^* = K_Y^*$.) Donc on obtient le diagramme commutatif dans $K^+ F(\mathcal{O}_Y, \text{Diff})$:

$$(2.5.1.4) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{DR} \circ DR^{-1} \circ f_*(\tilde{I}_X^*, F) & \rightarrow & \widetilde{DR} \circ DR^{-1} \circ f_*(\tilde{K}_X^*, F) \\ \downarrow \text{Tr} & & \downarrow \text{Tr} \\ \widetilde{DR} \circ DR^{-1}(\tilde{I}_Y^*, F) & \longrightarrow & (\tilde{K}_Y^*, F) \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont des quasi-isomorphismes filtrés. (Cette construction est suggérée par Kashiwara.)

2.5.2. Soit $(L^*, F) \in K_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ tel que $Gr_i^F L^j$ sont f_* -acycliques. D’après (2.4.11.2), on a les quasi-isomorphismes filtrés :

$$(2.5.2.1) \quad \begin{aligned} f_* \mathbf{D}(L^*, F) &\leftarrow f_* \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L^*, F), (\tilde{K}_X^*, F)) \\ \mathbf{D}f_*(L^*, F) &\leftarrow \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F(f_*(L^*, F), (\tilde{K}_Y^*, F)). \end{aligned}$$

car $Gr_p^F \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}^F((L^i, F), (\tilde{K}_X^i, F)) \simeq \bigoplus_q \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(Gr_q^F L^i, Gr_{p+q}^F \tilde{K}_X^i)$ sont flasques. Par définition, l’action de $\mathcal{O}_X$ (ou de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$) sur chaque $\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F(L^i, \tilde{K}_X^i)$ ($:= \bigcup_p \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(L^i, K_X^i \otimes F_p \mathcal{D}_X)$) est définie par la composition avec l’action naturelle de $\mathcal{O}_X$ (ou de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$) sur $\tilde{K}_X^i$, donc on obtient le morphisme dans $K_{\text{coh}}^+ F(\mathcal{O}_Y, \text{Diff})$:

$$(2.5.2.2) \quad f_* \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L^*, F), (\tilde{K}_X^*, F)) \rightarrow \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F(f_*(L^*, F), f_*(\tilde{K}_X^*, F)).$$

D’après (2.5.2.1–2), (2.4.10.1) et (2.5.1.4), on a le morphisme fonctoriel dans $D_{\text{coh}}^+ F(\mathcal{O}_Y, \text{Diff})$ (donc dans $D_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_Y, \text{Diff})$ d’après 2.2.10, 2.1.14 et 2.1.12):

$$(2.5.2.3) \quad f_* \mathbf{D}(L^*, F) \rightarrow \mathbf{D}f_*(L^*, F)$$

2.5.3. Proposition. *Le morphisme (2.5.2.3) induit un isomorphisme fonctoriel*

$$f_*\mathbf{D} \simeq \mathbf{D}f_*: D_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow D_{\text{coh}}^b F^f(\mathcal{O}_Y, \text{Diff}).$$

Preuve. Par dévissage, on peut supposer que $(L^\bullet, F)$ est un complexe de $\mathcal{O}_X$ -Modules muni d'une filtration triviale, i.e. $Gr_i^F L^\bullet = 0$ pour $i \neq 0$. On vérifie que $Gr_i^F f_*\mathbf{D}(L^\bullet, F)$ et $Gr_i^F \mathbf{D}f_*(L^\bullet, F)$ sont acycliques pour $i \neq 0$ et que

$$\begin{aligned} Gr_0^F f_*\mathbf{D}(L^\bullet, F) &= f_* \mathcal{H}om(L^\bullet, K_X^\bullet) \\ Gr_0^F \mathbf{D}f_*(L^\bullet, F) &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(f_*L^\bullet, K_X^\bullet). \end{aligned}$$

De plus, Gr_0^F du quasi-isomorphisme (2.4.10.1) appliqué à $f_*(L^\bullet, F)$ et $f_*(\tilde{K}_X^\bullet, F)$ est l'identité:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(f_*L^\bullet, f_*K_X^\bullet) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(f_*L^\bullet, f_*K_X^\bullet)$$

et Gr_0^F de (2.5.1.4) est un diagramme commutatif dans $K^+(\mathcal{O}_Y)$:

$$\begin{array}{ccc} f_*I_X^\bullet & \rightarrow & f_*K_X^\bullet \\ \downarrow Tr & & \downarrow Tr \\ I_Y^\bullet & \rightarrow & K_Y^\bullet \end{array}.$$

Donc Gr_0^F de (2.5.2.3) coïncide avec le morphisme de dualité dans la théorie de dualité analytique [25]; d'où l'assertion.

2.5.4. Corollaire. *On a un isomorphisme fonctoriel:*

$$f_*\mathbf{D} \simeq \mathbf{D}f_*: D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{\text{coh}}^b F(\mathcal{D}_Y).$$

Preuve. Cela résulte de (2.2.10.5) et de la compatibilité des foncteurs f_* et $\mathbf{D}$ avec le foncteur DR^{-1} , cf. 2.3.7 et 2.4.11.

2.5.5. Proposition. *La dualité (2.5.2.3) sur $D_{\text{hol}}^b F(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ est compatible à la dualité topologique par les foncteurs*

$$\text{Forget}: D_{\text{hol}}^b F(\mathcal{O}_X, \text{Diff}) \rightarrow D_c^b(\mathbf{C}_X) \quad (\text{de meme pour } Y)$$

et par les isomorphismes fonctoriels:

$$f_* \circ \text{Forget} = \text{Forget} \circ f_* \quad \text{et} \quad \mathbf{D} \circ \text{Forget} = \text{Forget} \circ \mathbf{D}$$

cf. 2.3.7 et 2.4.12.

Preuve. Par le quasi-isomorphisme canonique:

$$\mathbf{C}_X(d_X)[2d_X] \simeq \tilde{I}_X^\bullet \quad (\text{de même pour } Y),$$

le morphisme $Tr_f: f_*\tilde{I}_X^* \rightarrow \tilde{I}_Y^*$ (cf. (2.5.1.1)) représente le morphisme trace dans la théorie de dualité topologique (cf. par exemple [32]). Puisque $\tilde{K}_Y^*$ est un complexe de $\mathbf{C}$ -Modules injectifs, le morphisme Tr dans (2.5.1.4) se factorise par le quasi-isomorphisme: $\widetilde{DR} \circ DR^{-1} \circ f_*\tilde{K}_X^* \rightarrow f_*\tilde{K}_X^*$, donc on obtient le diagramme commutatif dans $K^+(\mathbf{C}_Y)$:

$$\begin{array}{ccccc} f_*\tilde{I}_X^* & \rightarrow & \widetilde{DR} \circ DR^{-1} \circ f_*\tilde{I}_X^* & \rightarrow & \widetilde{DR} \circ DR^{-1} \circ f_*\tilde{K}_X^* \rightarrow f_*\tilde{K}_X^* \\ \downarrow Tr & & \downarrow Tr & & \downarrow Tr \\ \tilde{I}_Y^* & \longleftarrow & \widetilde{DR} \circ DR^{-1} \tilde{I}_Y^* & \longrightarrow & \tilde{K}_Y^* \end{array}$$

$\swarrow Tr$

où les morphismes horizontaux sont des quasi-isomorphismes; en particulier, le morphisme $Tr: f_*\tilde{K}_X^* \rightarrow \tilde{K}_Y^*$ aussi représente le morphisme trace. Posons

$$\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^i(L, \tilde{K}_X^*) = \text{Forget}(\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F((L, F), (\tilde{K}_X^*, F))), \text{ etc.,}$$

On a alors un diagramme commutatif dans $D^+(\mathbf{C}_Y)$:

$$\begin{array}{ccc} f_*\mathcal{H}om_{\text{Diff}}^f(L^*, \tilde{K}_X^*) & \xleftarrow{\sim} & f_*\mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(L^*, \tilde{K}_X^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^f(f_*L^*, f_*\tilde{K}_X^*) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(f_*L^*, f_*\tilde{K}_X^*) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \\ \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^f(f_*L^*, \widetilde{DR} \circ DR^{-1} \circ f_*\tilde{K}_X^*) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(f_*L^*, \widetilde{DR} \circ DR^{-1} \circ f_*\tilde{K}_X^*) \\ \downarrow Tr & & \downarrow Tr \\ \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^f(f_*L^*, \tilde{K}_Y^*) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(f_*L^*, \tilde{K}_Y^*) \end{array}$$

$\swarrow Tr$

d'où l'assertion.

2.5.6. Corollaire. *La dualité de 2.5.4 sur $D_{\text{hol}}^b F(\mathcal{D}_X)$ est compatible avec la dualité topologique, par les foncteurs:*

$$\text{Forget} \circ DR: D_{\text{hol}}^b F(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_c^b(\mathbf{C}_X), \text{ etc.}$$

Preuve. Cela résulte de 2.5.5 et de la preuve de 2.5.4.

2.5.7. Remarque. On dit que $\mathbf{Z}_X(d_X)$ est le faisceau d'orientation de Deligne. On a l'isomorphisme canonique:

$$a_X^! \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}_X(d_X)[2d_X]$$

où $a_X: X \rightarrow pt$. Le morphisme trace $Tr: a_{X!} \mathbf{Z}_X(d_X)[2d_X] \rightarrow \mathbf{Z}$ est défini par le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^0(X, \mathbf{Z}(d_X)[2d_X]) & \xrightarrow{\quad Tr \quad} & \mathbf{Z} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^0(X, \mathcal{Q}_X^*(d_X)[2d_X]) & \xrightarrow{\quad (2\pi i)^{-d_X} \int_X \quad} & \mathbf{C}
 \end{array}$$

2.5.8. Remarque. Soit X une variété complexe lisse compacte. Soit $K = (K_A, (K_{A \otimes \mathbb{Q}}, W), (K_C, W, F))$ un A -complexe de Hodge mixte cohomologique au sens de [6, III (8.1.6)], tel que $K_A \in D_c^b(A_X)$ et que (K_C, W, F) soit représenté par un objet (L^*, F) de $C_{\text{hol}}^b(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$ muni d'une filtration W dans $C_{\text{hol}}^b(\mathcal{O}_X, \text{Diff})$. Alors on peut définir le dual de (K_C, W, F) par $\mathbf{D}((L^*, F), W)$. D'après 2.5.5, on voit que $\mathbf{D}K = (\mathbf{D}K_A, \mathbf{D}(K_{A \otimes \mathbb{Q}}, W), \mathbf{D}((L^*, F), W))$ est un A -complexe de Hodge mixte cohomologique, et que la dualité naturelle entre $H^i(X, K_A)$ et $H^{-i}(X, \mathbf{D}K_A)$ est compatible la structure de Hodge mixte. Par exemple, soit $(L^*, F) = (\mathcal{Q}_X^*(\log D), F)[d_X]$ avec $Gr_{d_X+i}^W = (a_i)_*(\mathcal{Q}_{\bar{D}}^{*(-i)}, F[-i])[d_X - i]$, où $F^p = \sigma_{\geq p}$, cf. [loc. cit], et soit $K_A = \mathbf{R}j_* A_X^*[d_X]$, où $j: X^* = X \setminus D \rightarrow X$. (Ici, X est Kähler, et D est un diviseur à croisements normaux.) Alors $\mathbf{D}K$ définit une structure de Hodge mixte sur $H_c^*(X^*, A)$, de plus $\mathbf{D}((L^*, F), W)$ est quasi-isomorphe (bifiltré) au complexe :

$$[(a_0)_*(\mathcal{Q}_{\bar{D}^{(0)}}^*, F[d_X]) \rightarrow \cdots \rightarrow (a_{d_X})_*(\mathcal{Q}_{\bar{D}^{(d_X)}}^*, F[d_X])]$$

tel que $Gr_{-d_X-i}^W = (a_i)_*(\mathcal{Q}_{\bar{D}^{(i)}}^*, F[d_X])[d_X - i]$. Notons que $DR^{-1}(L^*, F) \cong (\omega_X(*D), F)$, où F est une filtration définie par l'ordre du pôle (décalée par $-d_X$), cf. [loc. cit].

§3. Filtration de Malgrange-Kashiwara et Cycles Évanescents

Dans cet article, toute filtration rationnelle est indexée discrètement, i.e. il existe un entier $m > 0$ tel que $V_\alpha = V_{i/m}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $i \in \mathbb{Z}$ avec $i/m \leq \alpha < i+1/m$, si V est croissante. On notera $V_{<\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ et $Gr_\alpha^V = V_\alpha / V_{<\alpha}$.

3.1. Filtration rationnelle De Malgrange-Kashiwara

Soient X une variété complexe lisse, et X_0 une sous-variété fermée lisse de codimension 1. On définit $V_\alpha \mathcal{D}_X = \{P \in \mathcal{D}_X : PI_{X_0}^j \subset I_{X_0}^{j-[\alpha]}\}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}$, où $[\alpha] = \max \{i \in \mathbb{Z} : i \leq \alpha\}$, I_{X_0} est l'Idéal de X_0 , et $I_{X_0}^j = \mathcal{O}_X$ pour $j \leq 0$.

Soient t une équation locale de X_0 , ∂_t un champ de vecteur (localement défini) tel que $[\partial_t, t] = 1$.

3.1.1. Définition. Soit M un $\mathcal{D}_X$ -Module cohérent à droite, une filtration

rationnelle croissante V est dite la *filtration de Malgrange-Kashiwara*, si

$$(3.1.1.1) \quad \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} V_{\alpha} M = M, \text{ chaque } V_{\alpha} M \text{ est un sous } V_0 \mathcal{D}_X\text{-Module cohérent.}$$

$$(3.1.1.2) \quad (V_{\alpha} M) (V_i \mathcal{D}_X) \subset V_{\alpha+i} M \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{Q}, i \in \mathbb{Z}.$$

$$(V_{\alpha} M) t = V_{\alpha-1} M \text{ si } \alpha < 0.$$

$$(3.1.1.3) \quad \text{l'action de } t \partial_t - \alpha \text{ sur } Gr_{\alpha}^V M \text{ est nilpotente } (\alpha \in \mathbb{Q}).$$

Notons que $t \in V_{-1} \mathcal{D}_X$, $\partial_t \in V_1 \mathcal{D}_X$, que la condition (3.1.1.3) entraîne:

$$(3.1.1.4) \quad t: Gr_{\alpha}^V M \rightarrow Gr_{\alpha-1}^V M \text{ et } \partial_t: Gr_{\alpha-1}^V M \rightarrow Gr_{\alpha}^V M \text{ sont bijectifs pour } \alpha \neq 0,$$

$$(3.1.1.5) \quad V_{\alpha+i} M = (V_{\alpha} M) (V_i \mathcal{D}_X) \text{ pour } \alpha \geq 0, i \geq 0,$$

et que les conditions (3.1.1.2-4) sont indépendantes du choix de t, ∂_t .

3.1.2. Lemme (Kashiwara [17]). *La filtration V est unique si elle existe.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux filtrations V et V' . D'après les conditions (3.1.1.1-2) et (3.1.1.5), il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que

$$V_{\alpha-a} M \subset V'_{\alpha} M \subset V_{\alpha+b} M \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{Q};$$

en particulier, la filtration induite $(Gr_{\alpha}^V M, V')$ est finie. Par la condition (3.1.1.3), on vérifie que $Gr_{\alpha}^{V'} Gr_{\beta}^V M = 0$ si $\alpha \neq \beta$, donc $V'_{\alpha} Gr_{\alpha+b}^V M = 0$ si $b > 0$, i.e. $V'_{\alpha} \subset V_{\alpha+b-\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$, ce qui entraîne l'assertion, car V et V' sont discrètement paramétrées.

3.1.3. Lemme. *Si $\text{Supp } M \subset X_0$ et M est cohérent, M admet la filtration rationnelle le long de X_0 , de plus, on a*

$$M = M_0 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_t], \quad V_{\alpha} M = \bigoplus_{0 \leq i \leq [\alpha]} M_0 \otimes \partial_t^i$$

ou $M_0 = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X_0}, M) (= \text{Ker}(t: M \rightarrow M))$.

Preuve. D'après Kashiwara, on a $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$, et $\partial_t^i: M_0 \xrightarrow{\sim} M_i$, $t^i: M_i \xrightarrow{\sim} M_0$ ($i \geq 0$), où $M_i = \text{Ker}(t \partial_t - i)$; donc on a $M_0 = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X_0}, M)$, $M \simeq M_0 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_t]$. On vérifie facilement que la filtration V définie ci-dessus satisfait les conditions (3.1.1.1-3); d'où l'assertion.

3.1.4. Lemme. *L'action de t sur $V_{\alpha} M$ est injective pour $\alpha < 0$.*

Preuve. Soient $M' = \mathcal{H}^0_{X_0} M$ et $M'' = M/M'$, alors M' et M'' sont des $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents tels que l'action de t sur M'' est injective. Soit V la filtration induite (resp. quotient) sur M' (resp. M''), alors on vérifie que les conditions (3.1.1.1-3) sont satisfaites sauf $(V_{\alpha} M') t = V_{\alpha-1} M'$ ($\alpha < 0$); mais cela

résulte du diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & V_{\alpha}M' & \rightarrow & V_{\alpha}M & \rightarrow & V_{\alpha}M'' \rightarrow 0 \\ & & t \downarrow & & t \downarrow & & t \downarrow \wr \\ 0 & \rightarrow & V_{\alpha-1}M' & \rightarrow & V_{\alpha-1}M & \rightarrow & V_{\alpha-1}M'' \rightarrow 0 \quad (\alpha < 0). \end{array}$$

D'après 3.1.2 et 3.1.3, on a $V_{\alpha}M' = 0$ ($\alpha < 0$), donc $t: V_{\alpha}M \xrightarrow{\sim} V_{\alpha-1}M$ ($\alpha < 0$).

3.1.5. Corollaire. Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents. Si M admet la filtration rationnelle le long de X_0 , M' et M'' l'admettent, de plus on a des suites exactes:

$$0 \rightarrow V_{\alpha}M' \rightarrow V_{\alpha}M \rightarrow V_{\alpha}M'' \rightarrow 0 \quad (\alpha \in \mathbb{Q}).$$

(même argument que 3.1.4).

3.1.6. Proposition. Soit $u: M \rightarrow N$ un morphisme de $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents qui admettent la filtration rationnelle V , alors u preserve la filtration et est strict; en particulier, la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents munis de la filtration V est une catégorie abélienne, dont les morphismes sont toujours stricts.

(Cela résulte de 3.1.2 et 3.1.5.)

3.1.7. Lemme. Soit $u: M \rightarrow N$ un morphisme de $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents munis de la filtration V . Soit $X^* = X \setminus X_0$. Si $u|_{X^*}: M|_{X^*} \rightarrow N|_{X^*}$ est un isomorphisme, on a $u: V_{\alpha}M \xrightarrow{\sim} V_{\alpha}N$ pour tout $\alpha < 0$.

(Cela résulte de 3.1.3 et 3.1.6.)

3.1.8. Proposition. Soit M un $\mathcal{D}_X$ -Module cohérent muni de la filtration V . Soit M' le plus petit sous-objet de M tel que $M'|_{X^*} \xrightarrow{\sim} M|_{X^*}$, on a alors

$$\begin{aligned} M' &= (V_{\alpha}M) \mathcal{D}_X \quad \text{si } \alpha < 0 \\ M/M' &\simeq i_* \operatorname{Coker}(\partial_t: Gr_{-1}^V M \rightarrow Gr_0^V M) \\ \mathcal{H}_{X_0}^0 M &\simeq i_* \operatorname{Ker}(t: Gr_0^V M \rightarrow Gr_{-1}^V M) \end{aligned}$$

ou $i: X_0 \hookrightarrow X$ et i_* est l'image directe de $\mathcal{D}_{X_0}$ -Modules (localement, $i_* M_0 = M_0 \otimes \mathcal{C}[\partial_i]$).

Preuve. Puisque $M'|_{X^*} \xrightarrow{\sim} M|_{X^*}$, on a $V_{\alpha}M' = V_{\alpha}M$ ($\alpha < 0$), donc $(V_{\alpha}M) \mathcal{D}_X \subset M'$ ($\alpha < 0$). L'autre inclusion résulte de $(V_{\alpha}M) \mathcal{D}_{X|X^*} = M_{\alpha}V|_{X^*} = M|_{X^*}$ et de la définition de M' . On a

$$\begin{aligned} Gr_0^V(M/M') &= \operatorname{Coker}(Gr_0^V M' \rightarrow Gr_0^V M) \\ &= \operatorname{Coker}(\partial_t: Gr_{-1}^V M \rightarrow Gr_0^V M) \end{aligned}$$

car $M' \cap V_0 M = V_{-1} M + (V_{-1} M) \partial_t$ (cela résulte de $M' = \sum_{i \geq 0} (V_{-1} M) \partial_t^i$ et de $\partial_t^i: V_0 M / V_{-1} M \xrightarrow{\sim} V_i M / V_{i-1} M$.) Puisque $\text{supp } M/M' \subset X_0$, on a $M/M' = i_* Gr_0^V(M/M')$, cf. 3.1.3.

D'après 3.1.3, on a $\mathcal{H}_{X_0}^0 M = i_*(\text{Ker}(t: M \rightarrow M))$, donc il suffit de montrer que $\text{Ker}(t: M \rightarrow M) \subset V_0 M$ et $\text{Ker}(t: M \rightarrow M) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(Gr t: Gr_0^V M \rightarrow Gr_{-1}^V M)$. Soit $u \in M$ tel que $ut = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $u \in V_\alpha M$. Si $\alpha > 0$, on a $u \equiv 0$ dans $Gr_\alpha^V M$ car $ut \partial_t = 0$, on a donc $u \in V_0 M$ par récurrence. Puisque $\text{Ker } t \cap V_\alpha M = 0$ ($\alpha < 0$) d'après 3.1.4, $\text{Ker } t \rightarrow \text{Ker } Gr t$ est injectif. Si $ut \in V_{<-1} M$, il existe $v \in V_{<0}$ tel que $(u-v)t = 0$ par la condition (3.1.1.2), donc $\text{Ker } t \rightarrow \text{Ker } Gr t$ est bijectif. Ce qui achève la démonstration.

3.2. Compatibilité avec la filtration F

3.2.1. Soient X, X_0, X^* et t, ∂_t comme dans 3.1. Soit (M, F) un $\mathcal{D}_X$ -Module filtré cohérent, i.e. $Gr^F M$ est cohérent sur $Gr^F \mathcal{D}_X$. On dit que (M, F) admet la filtration rationnelle V le long de X_0 , si :

(3.2.1.1) M est muni de la filtration rationnelle de Malgrange-Kashiwara le long de X_0

$$(3.2.1.2) \quad (F_p V_\alpha M) t = F_p V_{\alpha-1} M \quad (\alpha < 0)$$

$$(3.2.1.3) \quad (F_p Gr_\alpha^V M) \partial_t = F_{p+1} Gr_{\alpha+1}^V M \quad (\alpha > -1)$$

On dit que (M, F) est *quasi-unipotent et régulier le long de X_0* , si (M, F) admet la filtration rationnelle le long de X_0 et chaque $Gr^F Gr_t^W Gr_\alpha^V M$ est cohérent sur $Gr^F \mathcal{D}_{X_0}$. Notons que l'action de $Gr^F \mathcal{D}_{X_0}$ est bien définie sur $Gr^F Gr_t^W Gr_\alpha^V M$, où W est la filtration associée à $t \partial_t - \alpha$ (cf. 1.3.9).

Soit f une fonction holomorphe (localement définie) sur X . On définit $i_f: X \rightarrow X \times \mathbb{C}$ par $i_f(x) = (x, f(x))$, alors on dit que (M, F) admet la filtration rationnelle le long de f , si $i_{f*}(M, F)$ l'admet le long de $X \times \{0\}$, et que (M, F) est *quasi-unipotent et régulier le long de f* , si $i_{f*}(M, F)$ l'est le long de $X \times \{0\}$.

3.2.2. Proposition. Avec les notations ci-dessus, on a :

(i) La condition (3.2.1.2) équivaut à :

$$(3.2.2.1) \quad F_p V_{<0} M = V_{<0} M \cap j_* j^{-1} F_p M \quad (:= \{u \in V_{<0} M : u|_{X^*} \in F_p M|_{X^*}\}) \text{ pour tout } p, \text{ où } j: X^* \hookrightarrow X.$$

(ii) Si $(Gr_{-1}^V M) \partial_t = Gr_0^V M$ (i.e. $M = (V_{<0} M) \mathcal{D}_X$), la condition (3.2.1.3) pour $\alpha \geq -1$ équivaut à :

$$(3.2.2.2) \quad F_p M = \sum_{i \geq 0} (F_{p-i} V_{<0} M) \partial_t^i \text{ pour tout } p.$$

(iii) Si $\text{supp } M \subset X_0$, la condition (3.2.1.3) équivaut à :

$$(3.2.2.3) \quad F_p M = \bigoplus_i F_{p-i} M_0 \otimes \partial_i^i \quad \text{pour tout } p,$$

ou $M = M_0 \otimes \mathbf{C}[\partial_i]$ et $M_0 = \text{Ker } t$ (i.e. $(M, F) = i_*(M_0, F)$).

Preuve. L'implication : (3.2.2.1) $\Rightarrow$ (3.2.1.2) est claire, car

$$V_\alpha M \cap j_* j^{-1} F_p M = \{u \in V_\alpha M : u|_{X^*} \in F_p M|_{X^*}\}$$

(3.2.1.2) $\Rightarrow$ (3.2.2.1) : Soit $u \in (j_* j^{-1} F_p M) \cap V_{<0} M$, alors il existe (localement)

$i \geq 0$ tel que $ut^i \in F_p M$, i.e. $ut^i \in F_p V_{<0} M$, donc $u \in F_p V_{<0} M$.

(3.2.1.3) pour $\alpha \geq -1 \Leftrightarrow$ (3.2.2.2) : On définit la filtration F' par

$$F'_p M = \sum_{i \geq 0} (F_{p-i} V_{<0} M) \partial_i^i.$$

D'abord admettons les assertions :

$$(3.2.2.4) \quad F'_p V_{<j} M = \sum_{0 \leq i \leq j} (F_{p-i} V_{<0} M) \partial_i^i \quad (j \geq 0)$$

$$(3.2.2.5) \quad F'_p V_\alpha M = \sum_{0 \leq i \leq [\alpha]} (F_{p-i} V_{<0} M) \partial_i^i + (F_{p-[\alpha]-1} V_{\alpha-[\alpha]-1} M) \partial_i^{[\alpha]+1} \quad (\alpha \geq 0).$$

On a alors

$$Gr_\alpha^V F'_p M = (Gr_{\alpha-[\alpha]-1}^V F_{p-[\alpha]-1} M) \partial_i^{[\alpha]+1} \quad (\alpha \geq 0)$$

et

$$F'_p V_{<0} M = F_p V_{<0} M.$$

Puisque $F'_p M \subset F_p M$, on a $F'_p M = F_p M$ pour tout p , si

$$Gr_\alpha^V F_p M = (Gr_{\alpha-[\alpha]-1}^V F_{p-[\alpha]-1} M) \partial_i^{[\alpha]+1} \quad \text{pour tout } p \in \mathbf{Z}, \alpha \geq 0,$$

i.e.

$$Gr_\alpha^V F_p M = (Gr_{\alpha-1}^V F_{p-1} M) \partial_i \quad \text{pour tout } p \in \mathbf{Z}, \alpha \geq 0;$$

d'où l'assertion.

Maintenant démontrons (3.2.2.4-5). Puisque $\partial_i^j : Gr_{\alpha-j}^V M \rightarrow Gr_\alpha^V M$ est injectif pour $\alpha - j > -1$, on a

$$(F_{p-[\alpha]-1} V_{<0} M) \partial_j^{[\alpha]+1} \cap V_\alpha M = (F_{p-[\alpha]-1} V_{\alpha-[\alpha]-1} M) \partial_i^{[\alpha]+1} \quad (\alpha \geq 0)$$

donc (3.2.2.5) est réduit à (3.2.2.4). Pour démontrer (3.2.2.4), il suffit de vérifier

$$(F_{p-j-1} V_{<0} M) \partial_i^{j+1} \cap V_{<j} M \subset (F_{p-j} V_{<0} M) \partial_i^j.$$

Si $u \in F_{p-j-1} V_{<0} M$ satisfait $u \partial_i^{j+1} \in V_{<j} M$, on a $u \partial_i \in V_{<0} M$, car

$$\partial_i^j : V_{<1} M / V_{<0} M \rightarrow V_{<j+1} M / V_{<j} M$$

est injectif; on a donc $u\partial_i^{j+1} \in (F_{p-j} V_{<0} M) \partial_i^j$; d'où l'assertion.

(3.2.1.3) $\Leftrightarrow$ (3.2.2.3): D'après 3.1.3, on a

$$M = M_0 \otimes \mathbf{C}[\partial_i], \quad V_\alpha M = \bigoplus_{0 \leq i \leq [\alpha]} M_0 \otimes \partial_i^i.$$

Posons $F'_p M = \bigoplus_i F_{p-i} M_0 \otimes \partial_i^i$, où $F_p M_0 = M_0 \cap F_p M$. Puisque $F'_p M \subset F_p M$, $F'_p V_0 M = F_p V_0 M$ et $F'_p Gr_i^V M = (F_{p-i} Gr_0^V M) \partial_i^i$ ($p \in \mathbf{Z}$, $i \geq 0$), on a $F' = F$, ssi $F_p Gr_i^V M = (F_{p-i} Gr_0^V M) \partial_i^i$, i.e. $(F_p Gr_i^V M) \partial_i = F_{p+1} Gr_{i+1}^V M$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $i \geq 0$. Ce qui achève la démonstration de 3.2.2.

3.2.3. Remarque. Si $(Gr_{-1}^V M) \partial_i = Gr_0^V M$, 3.2.2 implique que les conditions (3.2.1.2) pour $\alpha < 0$ et (3.2.1.3) pour $\alpha \geq -1$ sont satisfaites, ssi:

$$(3.2.3.1) \quad F_p M = \sum (V_{<0} M \cap j_* j^* F_{p-i} M) \partial_i^i \quad \text{pour tout } p.$$

Si $Gr t: Gr_0^V M \rightarrow Gr_{-1}^V M$ est injectif, on a

$$(3.2.3.2) \quad F_p M = \sum (V_0 M \cap j_* j^* F_{p-i} M) \partial_i^i \quad \text{pour tout } p,$$

sii on a (3.2.1.2-3) et, de plus, $Gr t: (Gr_0^V M, F) \rightarrow (Gr_{-1}^V M, F)$ est strict. En fait, on a (3.2.2.1) (resp. (3.2.2.2)) en remplaçant $V_{<0}$ par V_0 , sii on a (3.2.1.2) et $Gr t$ set strict (resp. sii on a (3.2.1.3)).

3.2.4. Lemme. Soient $i: X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée et $t: Y \rightarrow \mathbf{C}$ un morphisme lisse tels que $ti: X \rightarrow \mathbf{C}$ soit lisse. Posons $Y_0 = t^{-1}(0)$, $X_0 = i^{-1}Y_0$, alors un $\mathcal{D}_X$ -Module filtré cohérent (M, F) admet la filtration rationnelle le long de X_0 , sii $(\tilde{M}, F) = i_*(M, F)$ l'admet le long de Y_0 ; dans ce cas, on a $(\tilde{M}, F, V) = i_*(M, F, V)$, i.e. localement

$$\tilde{M} = M \otimes \mathbf{C}[\partial'], \quad F_p \tilde{M} = \bigoplus_{p-|v|} F_p M \otimes \partial'^v, \quad V_\alpha \tilde{M} = V_\alpha M \otimes \mathbf{C}[\partial']$$

ou $(t, x_1, \dots, x_n)$ sont des coordonnées de Y telles que

$$X = \{x_1 = \dots = x_l = 0\} \quad \text{et} \quad \partial' = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_l}).$$

Preuve. Puisque l'assertion est locale, on peut supposer que $\text{codim}_Y X = 1$, i.e. $X = \{x=0\}$, alors $\tilde{M} = M[\partial_x]$, $F_p \tilde{M} = \bigoplus F_{p-i} M \otimes \partial_x^i$ avec $M \otimes \partial_x^i = \text{Ker}(x\partial_x - i) \subset \tilde{M}$. Si $\tilde{M}$ admet la filtration V , chaque $V_\alpha \tilde{M}$ est stable par l'action de $x\partial_x$, car $x\partial_x \in V_0 \mathcal{D}_Y$; donc $V_\alpha \tilde{M}$ est compatible avec la décomposition $M = \bigoplus_i M \otimes \partial_x^i$, et on obtient une filtration de M qui satisfait les conditions (3.1.1.1-3) car on peut choisir ∂_t et ∂_x tels que $[\partial_t, x\partial_x] = 0$, $[t, x\partial_x] = 0$ (e.g. on prend des coordonnées $(t, x_1, x_2, \dots, x_m)$). Si (M, F) admet la filtration V , alors $V_\alpha \tilde{M} = V_\alpha M[\partial_x]$ satisfait les conditions (3.1.1.1-3). On vérifie facilement que (M, F, V)

satisfait les conditions (3.2.1.1.-3), *sii* $i_*(M, F, V)$ les satisfait.

3.2.5. Corollaire. Soient (M, F) , f, i_f et $(\tilde{M}, F) = i_{f*}(M, F)$ comme dans 3.2.1. Supposons que $f: X \rightarrow \mathbf{C}$ soit lisse, alors (M, F) admet la filtration rationnelle le long de f , *sii* (M, F) l'admet le long de $X_0 := f^{-1}(0)$; dans ce cas, où a

$$i_*(Gr_a^V M, F) = (Gr_a^V \tilde{M}, F),$$

ou $i: X_0 \hookrightarrow X$.

(C'est clair, car $t: X \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ et $f = t \circ i_f: X \rightarrow \mathbf{C}$ sont lisses.)

3.2.6. Lemme. Soient (M, F) , f et i_f comme dans 3.2.1. Posons $i_0: X = X \times \{0\} \rightarrow X \times \mathbf{C}$. Supposons que $\text{supp } M \subset f^{-1}(0)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

$$(3.2.6.1) \quad (F_p M) f \subset F_{p-1} M \quad \text{pour tout } p,$$

$$(3.2.6.2) \quad (M, F) \text{ est quasi-unipotent et régulier le long de } f,$$

$$(3.2.6.3) \quad \text{on a l'isomorphisme canonique: } i_{f*}(M, F) \xrightarrow{\sim} i_{0*}(M, F).$$

Preuve. Posons $(\tilde{M}, F) = i_{f*}(M, F)$, on a par définition une décomposition: $\tilde{M} = \bigoplus M \otimes \partial_i^i$ telle que $M \otimes \partial_i^i = \text{Ker}((t-f) \partial_i - i)$ et que $F_p \tilde{M} = \bigoplus F_{p-i} M \otimes \partial_i^i$. D'après 3.1.3, on a une autre: $\tilde{M} = \bigoplus \tilde{M}_0 \otimes \partial_i^i$ telle que $\tilde{M}_0 \otimes \partial_i^i = \text{Ker}(t \partial_i - i)$ et que $V_j \tilde{M} = \bigoplus_{0 \leq i \leq j} \tilde{M}_0 \otimes \partial_i^i$. Puisque

$$(\sum u_j \otimes \partial_i^j) (t \partial_i - i) = \sum (u_{j-1} f + u_j (j-i)) \otimes \partial_i^j \quad \text{pour } u_j \in M,$$

on a $\tilde{M}_0 \otimes \partial_i^i = \{ \sum u(-f)^i / i! \otimes \partial_i^{i+j} : u \in M \}$, et on obtient l'isomorphisme canonique (3.2.6.3) sans filtration F , par l'isomorphisme $\tilde{M}_0 \otimes 1 \xrightarrow{\sim} M$ induit par la projection $\tilde{M} \rightarrow M \otimes 1$. On a (3.2.6.2) $\Rightarrow$ (3.2.6.1) d'après 3.2.2, car la compatibilité de la décomposition: $\tilde{M} = \bigoplus \tilde{M}_0 \otimes \partial_i^i$ avec la filtration F implique:

$$(3.2.6.4) \quad F_p \tilde{M} \cap (\tilde{M}_0 \otimes \partial_i^i) = \{ \sum u(-f)^i / i! \otimes \partial_i^{i+j} \mid u \in F_{p-j} M \},$$

par le morphisme: $M \otimes \partial_i^i \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}_0 \otimes \partial_i^i$. De même on vérifie que (3.2.6.1) implique la compatibilité ci-dessus et la condition (3.2.6.4); d'où (3.2.6.1) $\Rightarrow$ (3.2.6.3). L'implication (3.2.6.3) $\Rightarrow$ (3.2.6.2) est triviale; d'où l'assertion.

3.2.7. Lemme. Soient X, X_0 et (M, F) comme dans 3.2.1. Supposons que M (resp. $Gr_p^F M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0}$) est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_{X_0}$) et que (M, F) admet la filtration rationnelle le long de X_0 , alors chaque $Gr_p^F M$ est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_X$ dans un voisinage de X_0 .

Preuve. Par hypothèse, on a $V_{-i-1}M = Mt^i$, $F_p V_{-i-1}M = (F_p M) t^i$ ($i \geq 0$), donc

$$t^i: Gr_p^F M \xrightarrow{\sim} V_{-i-1} Gr_p^F M, \quad t^i: Gr_p^F M \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} \xrightarrow{\sim} Gr_{-i-1}^V Gr_p^F M \quad (i \geq 0).$$

Puisque $Gr_p^F M \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}}$ est localement libre, on a localement un isomorphisme

$$\lim_{\leftarrow} Gr_p^F M / (Gr_p^F M) t^i \simeq (Gr_p^F M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0}) [[t]] \simeq (\oplus \mathcal{O}_{X_0}) [[t]]$$

(non canoniquement). Puisque $Gr_p^F M$ est cohérent, $Gr_p^F M$ est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_X$ dans un voisinage de X_0 .

3.3. Catégorie dérivées et Images directes

3.3.1. Soient X, X_0, t, ∂_t et $(\mathcal{D}_X, F, V)$ comme dans 3.1 et 3.2. Soit $MFV(\mathcal{D}_X)$ la catégorie additive des $\mathcal{D}_X$ -Modules filtrés (M, F, V) qui satisfont les conditions:

$$(3.3.1.1) \quad \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} F_p M = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} V_{\alpha} M = M, \quad F_p M = 0 \quad \text{pour } p \ll 0 \quad (\text{localement}),$$

$$(3.3.1.2) \quad (F_p V_{\alpha} M) (F_p V_{\beta} \mathcal{D}_X) \subset F_{p+q} V_{\alpha+\beta} M \quad (p, q \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}),$$

$$(3.3.1.3) \quad \begin{cases} t: F_p V_{\alpha} M \xrightarrow{\sim} F_p V_{\alpha-1} M & (\alpha < 0), \\ \partial_t: F_p Gr_{\alpha}^V M \xrightarrow{\sim} F_{p+1} Gr_{\alpha+1}^V M & (\alpha > -1), \end{cases}$$

où les morphismes sont $\mathcal{D}_X$ -linéaire et préservent les filtrations.

Soient $CFV(\mathcal{D}_X) = C(MFV(\mathcal{D}_X))$, $KFV(\mathcal{D}_X) = K(MFV(\mathcal{D}_X))$ comme dans [31], où on suppose que $V_{\alpha} M^* = V_{\lfloor m\alpha \rfloor / m} M^*$ pour quelque $m > 0$, si $(M^*, F, V) \in CFV(\mathcal{D}_X)$. On définit la sous-catégorie pleine $KFV(\mathcal{D}_X)^{\emptyset}$ par:

$$(M^*, F, V) \in KFV(\mathcal{D}_X)^{\emptyset} \text{ ssi } H^i(F_p V_{\alpha} M^*) = 0 \quad \text{pour tout } i, p, \alpha.$$

Posons $DFV(\mathcal{D}_X) = KFV(\mathcal{D}_X) / KFV(\mathcal{D}_X)^{\emptyset}$.

On définit $D^*FV(\mathcal{D}_X)$ pour $* = +, -, b$, comme dans [31], alors ce sont des sous-catégories pleines de $DFV(\mathcal{D}_X)$, cf. la preuve de 1.2.4.

Considérons les conditions suivantes:

$$(3.3.1.4) \quad \text{l'action de } t\partial_t - \alpha \text{ sur } \mathcal{H}^i Gr_{\alpha}^V M^* \text{ est nilpotente} \quad (i \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Q})$$

$$(3.3.1.5) \quad \text{chaque } \mathcal{H}^i F_p V_{\alpha} M^* \text{ est cohérent sur } \mathcal{O}_X \quad (i \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Q}).$$

On définit la sous-catégorie pleine $DFV_m(\mathcal{D}_X)$ (resp. $DFV_c(\mathcal{D}_X)$) par: $(M^*, F, V) \in DFV_m(\mathcal{D}_X)$ (resp. $DFV_c(\mathcal{D}_X)$) ssi (M, F, V) satisfait la condition (3.3.1.4) (resp. (3.3.1.5)). Posons $DFV_{mc}(\mathcal{D}_X) = DFV_m(\mathcal{D}_X) \cap DFV_c(\mathcal{D}_X)$.

3.3.2. Lemme. Soit $(M, F, V) \in MFV(\mathcal{D}_X)$, posons

$$(F_p V_\alpha M)^\wedge = \lim_{\leftarrow \beta} F_p(V_\alpha/V_\beta) M, \quad F_p \hat{M} = \lim_{\rightarrow \alpha} (F_p V_\alpha M)^\wedge$$

$$V_\alpha \hat{M} = \lim_{\rightarrow \beta} (F_p V_\alpha M)^\wedge, \quad \hat{M} = \lim_{\rightarrow \alpha \beta} (F_p V_\alpha M)^\wedge,$$

alors les morphismes canoniques $F_p \hat{M} \rightarrow \hat{M}$, $V_\alpha \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ et $(F_p V_\alpha M)^\wedge \rightarrow \hat{M}$ sont injectifs, et $F_p V_\alpha \hat{M} = (F_p V_\alpha M)^\wedge$ ou $F_p V_\alpha \hat{M} = F_p \hat{M} \cap V_\alpha \hat{M}$; de plus, $F_p(V_\alpha/V_\beta) \hat{M} \xrightarrow{\sim} F_p(V_\alpha/V_\beta) M$. (On notera $(\hat{M}, F, V) = (M, F, V)^\wedge$.)

Preuve. Pour $p > q$, $\alpha > \beta > \gamma$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & F_q(V_\beta/V_\gamma) M & \rightarrow & F_q(V_\alpha/V_\gamma) M & \rightarrow & F_q(V_\alpha/V_\beta) M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & F_p(V_\beta/V_\gamma) M & \rightarrow & F_p(V_\alpha/V_\gamma) M & \rightarrow & F_p(V_\alpha/V_\beta) M \rightarrow 0. \end{array}$$

Par la condition de Mittag-Leffler [38], on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (F_q V_\beta M)^\wedge & \rightarrow & (F_q V_\alpha M)^\wedge & \rightarrow & F_q(V_\alpha/V_\beta) M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & (F_p V_\beta M)^\wedge & \rightarrow & (F_p V_\alpha M)^\wedge & \rightarrow & F_p(V_\alpha/V_\beta) M \rightarrow 0 \end{array}$$

donc $(F_q V_\beta M)^\wedge \rightarrow \hat{M}$ sont injectifs et $F_q V_\beta \hat{M} = (F_q V_\beta M)^\wedge$ (en prenant la limite $\alpha \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$); d'où l'assertion.

3.3.3. Lemme. Soit $(M^*, F, V) \in \text{DFV}_m(\mathcal{D}_X)$. Si chaque $(\text{Gr}_\alpha^V M, F)$ est strict, $(\hat{M}^*, F, V)$ est strict, i.e. $\mathcal{H}^i(F_p V_\alpha \hat{M}) \rightarrow \mathcal{H}^i(\hat{M})$ sont injectifs et $\mathcal{H}^i(F_p \hat{M}) \cap \mathcal{H}^i(V_\alpha \hat{M}) = \mathcal{H}^i(F_p V_\alpha \hat{M})$ pour tout i, p, α , cf. 1.2.

Preuve. Pour $\alpha > \beta > \gamma$, on a une suite exacte scindée de $V_\alpha \mathcal{D}_X$ -Modules

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^i(V_\beta/V_\gamma) M^* \rightarrow \mathcal{H}^i(V_\alpha/V_\gamma) M^* \rightarrow \mathcal{H}^i(V_\alpha/V_\beta) M^* \rightarrow 0,$$

en particulier, $((V_\alpha/V_\beta) M^*, V)$ est strict, donc $((V_\alpha/V_\beta) M^*, F, V)$ est strict, car chaque $(\text{Gr}_\alpha^V M, F)$ l'est, cf. 1.2.9(d); alors l'assertion résulte du lemme suivant :

3.3.4. Lemme. Soit $(M^*, F, V) \in \text{DFV}(\mathcal{D}_X)$, alors $((V_\alpha/V_\beta) M^*, F, V)$ est strict pour tout $\alpha > \beta$, si $(\hat{M}^*, F, V) = (M^*, F, V)^\wedge$ est strict; dans ce cas, $\mathcal{H}^i F_p V_\alpha \hat{M}^* = \lim_{\leftarrow \beta} \mathcal{H}^i F_p(V_\alpha/V_\beta) M^*$.

Preuve. Supposons que $((V_\alpha/V_\beta) M^*, F, V)$ sont stricts, alors $\mathcal{H}^i F_p(V_\beta/V_\gamma) M^* \rightarrow \mathcal{H}^i F_p(V_\alpha/V_\gamma) M^*$ est injectif, donc on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^i F_p(V_\beta/V_\gamma) M^* \rightarrow \mathcal{H}^i F_p(V_\alpha/V_\gamma) M^* \rightarrow \mathcal{H}^i F_p(V_\alpha/V_\beta) M^* \rightarrow 0;$$

en particulier, la condition de Mittag-Leffler est satisfaite pour $\{\mathcal{H}^i F_p(V_\alpha/V_\beta) M^*\}_\beta$,

donc $\mathcal{H}^i F_p V_\alpha \hat{M}^* = \varprojlim_{\beta} \mathcal{H}^i F_p (V_\alpha / V_\beta) M^*$; par le même argument que dans 3.3.2, on a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{H}^i F_q V_\beta \hat{M}^* & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_q V_\alpha \hat{M}^* & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_q (V_\alpha / V_\beta) M^* & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow \mathcal{H}^i F_p V_\beta \hat{M}^* & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p V_\alpha \hat{M}^* & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p (V_\alpha / V_\beta) M^* & \rightarrow & 0 \end{array}$$

i.e. $(\hat{M}^*, F, V)$ est strict.

Si $(\hat{M}^*, F, V)$ est strict, $((V_\alpha / V_\beta) \hat{M}^*, F, V)$ sont stricts, cf. 1.2.9. Puisque $((V_\alpha / V_\beta) M^*, F, V) \xrightarrow{\sim} ((V_\alpha / V_\beta) \hat{M}^*, F, V)$, on obtient l'assertion. Ce qui achève la démonstration de 3.3.4 et de 3.3.3.

3.3.5. Lemme. Soit $(M^*, F, V) \in D F V_c(\mathcal{D}_X)$. Si $(M^*, F, V)^\wedge$ est strict, et si $\mathcal{H}^i F_p \text{Gr}_\alpha^\vee M^* = 0$ pour $i \gg 0$, alors $(M^*, F, V)|_{X_0}$ est strict.

Preuve. Soit $\alpha < 0$. Puisque $(\hat{M}^*, V)$ est strict et $t: V_\alpha \hat{M}^* \xrightarrow{\sim} V_{\alpha-1} \hat{M}^*$, $\mathcal{H}^i V_\alpha \hat{M}^*$ est sans t -torsion, donc $\mathcal{H}^i F_p V_\alpha M^*$ est aussi sans t -torsion, si $\mathcal{H}^i F_p V_\alpha M'' \rightarrow \mathcal{H}^i F_p V_\alpha \hat{M}^*$ est injectif, où $M'' = M^*|_{X_0}$. On va démontrer l'assertion:

$$(3.3.5.1) \quad \mathcal{H}^i F_p V_\alpha \hat{M}^* = \varprojlim_j \mathcal{H}^i F_p V_\alpha M^* / (\mathcal{H}^i F_p V_\alpha M^*) t^j \quad (\alpha < 0)$$

par récurrence sur i , car (3.3.5.1) entraîne l'injectivité de $\mathcal{H}^i F_p V_\alpha M'' \rightarrow \mathcal{H}^i F_p V_\alpha \hat{M}^*$ ($\alpha < 0$). Notons que (3.3.5.1) est vérifiée pour $i \gg 0$, car $\mathcal{H}^i F_p V_\alpha M'' = 0$ ($i \gg 0$) résulte de la suite exacte:

$$\begin{array}{ccccccc} & & t^j & & & & \\ & & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p V_\alpha M^* & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p (V_\alpha / V_{\alpha-j}) M^* & \\ & & & & & & \\ & & t^j & & & & \\ & & \rightarrow & \mathcal{H}^{i+1} F_p V_\alpha M^* & \rightarrow & \mathcal{H}^{i+1} F_p V_\alpha M^* & \rightarrow . \end{array}$$

Supposons que (3.3.5.1) est vérifiée pour $i+1$, alors on déduit $\mathcal{H}^i F_p (V_\alpha / V_{\alpha-j}) M^* = \mathcal{H}^i F_p V_\alpha M^* / (\mathcal{H}^i F_p V_\alpha M^*) t^j$ de la suite exacte ci-dessus; donc on a (3.3.5.1) pour i , cf. 3.3.4.

Pour $\alpha > \beta$, $i, p \in \mathbb{Z}$, considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{H}^i F_p V_\beta M'' & \xrightarrow{v} & \mathcal{H}^i F_p V_\alpha M'' & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p (V_\alpha / V_\beta) M'' & \rightarrow & 0 \\ & u' \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow \wr & \\ 0 \rightarrow \mathcal{H}^i F_p V_\beta \hat{M}^* & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p V_\alpha \hat{M}^* & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p (V_\alpha / V_\beta) \hat{M}^* & \rightarrow & 0 . \end{array}$$

Par hypothèse, la deuxième ligne est exacte. Si $\beta < 0$, on a démontré que u' est injectif, donc v est injectif par le diagramme, et la première ligne est exacte ($\beta < 0$); alors u est aussi injectif, donc, par le même argument, la première ligne est exacte pour tout $\alpha > \beta$, $i, p \in \mathbb{Z}$. Puisque $\mathcal{H}^i F_q V_\alpha \hat{M}^* \rightarrow \mathcal{H}^i F_p V_\alpha \hat{M}^*$ sont in-

jectifs, $\mathcal{H}^i F_q V_\alpha M'' \rightarrow \mathcal{H}^i F_p V_\alpha M''$ sont aussi injectifs; on a donc obtenu le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_q V_\beta M'' & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_q V_\alpha M'' & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_q (V_\alpha/V_\beta) M'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p V_\beta M'' & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p V_\alpha M'' & \rightarrow & \mathcal{H}^i F_p (V_\alpha/V_\beta) M'' \rightarrow 0 \end{array}$$

d'où l'assertion.

3.3.6. Définition. Soient X, X_0 et $(\mathcal{D}_X, F, V)$ comme dans 3.3.1. Soient $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [-1, 0]$ et $p \in \mathbb{Z}$. Soit L un $\mathcal{O}_X$ -Module tel que $\bigcup_i \text{Ker}(t^i: L \rightarrow L) = \text{Ker}(t: L \rightarrow L)$ si $\alpha = 0$ et L est sans t -torsion si $\alpha \neq 0$. On définit $L \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha]) = (M, F, V)$ par:

$$\begin{aligned} M &= L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X, F_q M = \text{Im}(L \otimes F_{q-p} \mathcal{D}_X \hookrightarrow L \otimes \mathcal{D}_X) \\ V_\beta M &= \text{Im}(L \otimes V_{\beta-\alpha} \mathcal{D}_X \rightarrow L \otimes \mathcal{D}_X). \end{aligned}$$

3.3.7. Lemme. $F_q V_\beta M = \text{Im}(L \otimes F_{q-p} V_{\beta-\alpha} \mathcal{D}_X \rightarrow L \otimes \mathcal{D}_X)$ et $L \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha]) \in MFV(\mathcal{D}_X)$ ($-1 \leq \alpha \leq 0$).

Preuve. On peut supposer que $p = 0$. Si L est sans t -torsion, alors $L \otimes F_q V_{\beta-\alpha} \mathcal{D}_X \rightarrow L \otimes \mathcal{D}_X$ sont injectifs et l'assertion est claire, car $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(L, N) = 0$ pour $N = \mathcal{D}_X/F_q V_\beta \mathcal{D}_X, F_q \mathcal{D}_X/F_q V_\beta \mathcal{D}_X$, etc. Si $Lt = 0$ et $\alpha = 0$, on a

$$\begin{aligned} L \otimes \mathcal{D}_X &= L \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{D}_{X_0}[\partial_i] \\ F_q(L \otimes \mathcal{D}_X) &= L \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} (\bigoplus_i F_{q-i} \mathcal{D}_{X_0} \otimes \partial_i^i) \\ V_\beta(L \otimes \mathcal{D}_X) &= L \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} (\bigoplus_{0 \leq i \leq [\beta]} \mathcal{D}_{X_0} \otimes \partial_i^i). \\ \text{Im}(L \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X \rightarrow L \otimes \mathcal{D}_X) &= L \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} (\bigoplus_{0 \leq i \leq [\beta]} F_{q-i} \mathcal{D}_{X_0} \otimes \partial_i^i) \end{aligned}$$

d'où l'assertion. Considérons le cas $\alpha = 0$. Par hypothèse, on a une suite exacte $0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0$ telle que $L't = 0$ et L' est sans t -torsion. On définit $L'_{q\beta}, L_{q\beta}$ et $L''_{q\beta}$ par

$$L_{q\beta} = \text{Im}(L \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X \rightarrow L \otimes \mathcal{D}_X), \text{ etc.}$$

On a une suite exacte $0 \rightarrow L'_{q\beta} \rightarrow L_{q\beta} \rightarrow L''_{q\beta} \rightarrow 0$, car on a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L' \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X & \rightarrow & L \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X & \rightarrow & L'' \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & L' \otimes \mathcal{D}_X & \longrightarrow & L \otimes \mathcal{D}_X & \longrightarrow & L'' \otimes \mathcal{D}_X \longrightarrow 0. \end{array}$$

Puisque $L'_{q\alpha} \cap L'_{p\beta} = L'_{q\beta}$ (même pour L'') pour $\alpha > \beta, p > q$, on a $L_{q\alpha} \cap L_{p\beta} = L_{q\beta}$, cf. 1.1.9, donc $F_q V_\beta M = L_{q\beta}$ en prenant la limite. L'autre assertion est claire.

3.3.8. Definition. On dit que $(M, F, V) \in MFV(\mathcal{D}_X)$ est un Module induit, si $(M, F, V) \simeq \bigoplus_{p, \alpha} L_{p, \alpha} \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha])$ pour des $\mathcal{O}_X$ -Modules $L_{p, \alpha}$ satisfaisant les condition de 3.3.6 ($-1 \leq \alpha \leq 0$). Soit $KFV_i(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $KFV(\mathcal{D}_X)$ des Modules induits, posons

$$D^*FV_i(\mathcal{D}_X) = K^*FV_i(\mathcal{D}_X)/K^*FV_i(\mathcal{D}_X)^\emptyset$$

pour $*$ = $\emptyset, +, -, b$, on a alors l'équivalence de catégories

$$D^-FV_i(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} D^-FV(\mathcal{D}_X)$$

car :

3.3.9. Lemme. Soit $(M, F, V) \in MFV(\mathcal{D}_X)$, soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{Q} \cap [-1, 0]$ tel que $Gr_\alpha^V M = 0$ si $\alpha \in (\mathbb{Q} \cap [-1, 0]) \setminus A$; alors $F_p V_\alpha M$ satisfait les conditions de 3.3.6 pour $-1 \leq \alpha \leq 0$, de plus, le morphisme naturel

$$u: \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}, \alpha \in A} F_p V_\alpha M \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha]) \rightarrow (M, F, V)$$

est un épimorphisme strict et $\text{Ker } u \in MFV(\mathcal{D}_X)$.

Preuve. La première assertion résulte de $t: F_p V_\alpha M \xrightarrow{\sim} F_p V_{\alpha-1} M$ ($\alpha < 0$) et $(V_0 M) \cap V_{-1} M$. Soit $u: (N, F, V) \rightarrow (M, F, V)$ un morphisme de $MFV(\mathcal{D}_X)$, alors u est un épimorphisme strict, si $u(F_p V_\alpha N) = F_p V_\alpha M$ pour tout p, α (i.e. les trois filtrations $(F, V, \text{Ker } u)$ de N sont compatibles, cf. § 1); alors $\text{Ker } u \in MFV(\mathcal{D}_X)$ résulte de la suite exacte

$$0 \rightarrow F_p V_\alpha (\text{Ker } u) \rightarrow F_p V_\alpha N \rightarrow F_p V_\alpha M \rightarrow 0 ;$$

d'où l'assertion.

3.3.10. Lemme. Soit $(M, F, V) = L \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha])$ un Module induit, soit $\mathcal{G}^0$ le foncteur des sections discontinues, alors $\mathcal{G}^0(L)$ satisfait les conditions de 3.3.6, de plus, on a

$$(\mathcal{G}^0 L) \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha]) \simeq \mathcal{G}^0(L \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha]))$$

ou $(\bar{M}, F, V) = \mathcal{G}^0(M, F, V)$ est défini par :

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ q \beta}} \mathcal{G}^0(F_p V_\beta M) , \\ F_q \bar{M} &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \beta}} \mathcal{G}^0(F_q V_\beta M) , \\ V_\beta \bar{M} &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ q}} \mathcal{G}^0(F_q V_\beta M) . \end{aligned}$$

Preuve. Soit (*) $0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -Modules telle que $L't=0$ et L'' est t -torsion, alors $\mathcal{G}^0(*)$ est exacte et satisfait la même condition que (*), donc $(\mathcal{G}^0 L) \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha])$ est bien défini; alors l'assertion résulte de

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^0(\operatorname{Im}(L \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X \rightarrow L \otimes \mathcal{D}_X)) &\simeq \operatorname{Im}(\mathcal{G}^0(L \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X) \rightarrow \mathcal{G}^0(L \otimes \mathcal{D}_X)) \\ &\simeq \operatorname{Im}((\mathcal{G}^0 L) \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X \rightarrow (\mathcal{G}^0 L) \otimes \mathcal{D}_X) \end{aligned}$$

car $F_q V_\beta \mathcal{D}_X$ est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_X$ et $(\mathcal{G}^0 L) \otimes \mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{G}^0(L \otimes \mathcal{D}_X)$ est injectif.

3.3.11. Lemme. Soit $(M_i, F, V) = L_i \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha])$ un Module induit, soit $0 \rightarrow L'_i \rightarrow L_i \rightarrow L''_i \rightarrow 0$ une suite exacte telle que $L'_i t=0$ et L''_i est sans t -torsion ($i=1, 2$). Soit $u: (M_1, F, V) \rightarrow (M_2, F, V)$ un morphisme de $MFV(\mathcal{D}_X)$ induit par $\bar{u}: L_1 \rightarrow L_2$. Si $\bar{u}$ est injectif et $L_2''/\bar{u}(L_1'')$ est sans t -torsion, alors u est un monomorphisme strict et $\operatorname{Coker} u \simeq \operatorname{Coker} \bar{u} \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha])$.

Preuve. Si $L_i t=0$ ($i=1, 2$), l'assertion est claire. Si L_i sont sans t -torsion, l'assertion résulte de

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L_i \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X & \rightarrow & L_2 \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X & \rightarrow & L_3 \otimes F_q V_\beta \mathcal{D}_X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & L_1 \otimes \mathcal{D}_X & \longrightarrow & L_2 \otimes \mathcal{D}_X & \longrightarrow & L_3 \otimes \mathcal{D}_X \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $L_3 = \operatorname{Coker} \bar{u}$. Dans le cas général, posons

$$(M_i^*, F, V) = L_i^* \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha])$$

pour $i=1, 2, 3$, $*$ = $\emptyset, ', ''$, où $L_3 = \operatorname{Coker} \bar{u}$; alors

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & F_q V_\beta M'_1 & \rightarrow & F_q V_\beta M'_2 & \rightarrow & F_q V_\beta M'_3 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & F_q V_\beta M_1 & \rightarrow & F_q V_\beta M_2 & \rightarrow & F_q V_\beta M_3 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & F_q V_\beta M''_1 & \rightarrow & F_q V_\beta M''_2 & \rightarrow & F_q V_\beta M''_3 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

d'où l'assertion.

3.3.12. Définition. Soient $f: X \rightarrow Y$ et $t: Y \rightarrow S$ des morphismes de variétés complexes lisses tels que t et tf sont lisses. Supposons que S est un disque ouvert, posons $Y_0 = t^{-1}(0)$, $X_0 = f^{-1}(Y_0)$. Soit $MFV(\mathcal{D}_X)$ comme dans 3.3.1. On définit

$MFV(f^{-1}\mathcal{D}_Y)$ et $MFV_i(f^{-1}\mathcal{D}_Y)$, etc. en remplaçant $\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X$ par $f^{-1}\mathcal{D}_Y, f^{-1}\mathcal{O}_Y$.

Soit $(\mathcal{D}_{X \rightarrow Y}, F, V) = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} f^{-1}(\mathcal{D}_Y, F, V)$; on définit le foncteur $DR_{X/Y}$: $MFV(\mathcal{D}_X) \rightarrow MFV(f^{-1}\mathcal{D}_Y)$ par $\otimes_{\mathcal{D}_X}^{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$, i.e. $(\bar{M}, F, V) = DR_{X/Y}(M, F, V)$ est défini par:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= M \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \\ F_p \bar{M} &= \text{Im} \left(\bigoplus_{i+j=p} F_i M \otimes F_j \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \rightarrow \bar{M} \right) \\ V_\alpha \bar{M} &= \text{Im} \left(\bigoplus_{\beta+\gamma=\alpha} V_\beta M \otimes V_\gamma \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \rightarrow \bar{M} \right)\end{aligned}$$

3.3.13. Lemme. $DR_{X/Y}(L \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha])) \simeq L \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} (f^{-1}\mathcal{D}_Y, F[p], V[\alpha]).$

$$\begin{aligned}\text{Preuve. } \bar{M} &= (L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{O}_X \otimes f^{-1}\mathcal{D}_Y) = L \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y \\ F_q \bar{M} &= \text{Im} \left(\bigoplus_{i+j=q} L \otimes F_{i-p} \mathcal{D}_X \otimes F_j \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \right) \\ &= \text{Im} (L \otimes F_{q-p} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}) \\ &= \text{Im} (L \otimes f^{-1} F_{q-p} \mathcal{D}_Y \rightarrow L \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y)\end{aligned}$$

(de même pour V) car $F_p \mathcal{D}_X \otimes F_q \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \subset F_{p+q} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$, $V_\alpha \mathcal{D}_X \otimes V_\beta \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \subset V_{\alpha+\beta} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$ et $1 \in F_0 V_0 \mathcal{D}_X$.

3.3.14. Lemme. $DR_{X/Y}(K F V_i(\mathcal{D}_X)^\emptyset) \subset K F V_i(f^{-1}\mathcal{D}_Y)^\emptyset.$

Preuve. Soient $Z = X \times_S Y$, $i: X \hookrightarrow Z$, $p: Z \rightarrow Y$. Puisque $DR_{X/Y} = i^{-1} DR_{Z/Y}$ $DR_{X/Z}$, on peut supposer que f est une immersion fermée ou lisse.

Si f est une immersion fermée, $DR_{X/Y}$ est localement donné par $\bigotimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}[\partial]$ donc l'assertion est claire. Si f est lisse, on a localement $X = W \times Y$, $f = pr_2$. On définit $\tilde{DR}_W M = M \otimes A^{-*} \theta_W$, i.e. le complexe de Koszul pour $\partial_1, \dots, \partial_n$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont des coordonnées de W . On définit les filtrations par

$$\begin{aligned}F_p(M \otimes A^{-i} \theta_W) &= F_{p+i} M \otimes A^{-i} \theta_W, \\ V_\alpha(M \otimes A^{-i} \theta_W) &= V_\alpha M \otimes A^{-i} \theta_W,\end{aligned}$$

alors le morphisme $M \rightarrow M \otimes \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$ ($u \mapsto u \otimes 1_{X \rightarrow Y}$) induit un isomorphisme

$$(3.3.14.1) \quad \tilde{DR}_W(M, F, V) \xrightarrow{\sim} DR_{X/Y}(M, F, V);$$

en effet on peut supposer que L est sans t -torsion où $Lt=0$, alors on peut réduire au cas $L = \mathcal{O}_X$ ou $\mathcal{O}_{X_0}$, et vérifier (3.3.14.1) directement.

Si $(M^*, F, V) \in K F V_i(\mathcal{D}_X)^\emptyset$, chaque $F_p V_\alpha \tilde{DR}_W M^*$ est acyclique, d'où l'assertion.

3.3.15. Supposons que $f: X \rightarrow Y$ est propre. On définit

$$f_*: D^*FV_i(\mathcal{D}_X) \rightarrow D^*FV_i(\mathcal{D}_Y)$$

pour $*$ = $\emptyset, +, -, b$, par $f_* = f_* DR_{X/Y}$, où

$$f_*: D^*FV_i(f^{-1}\mathcal{D}_X) \rightarrow D^*FV_i(\mathcal{D}_Y)$$

est le foncteur image directe, qui est bien défini d'après 3.3.10 et 3.3.11. On notera encore f_* la composition

$$D^-FV(\mathcal{D}_X) \xleftarrow{\sim} D^-FV_i(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{f_*} D^-FV_i(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} D^-FV(\mathcal{D}_Y).$$

Notons que, par définition, le foncteur Gr_α^V commute au foncteur image direct, i.e. $f_{0*}Gr_\alpha^V = Gr_\alpha^V f_*$, où $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$.

3.3.16. Lemme. Soit $(M, F, V) \in MFV(\mathcal{D}_X)$. Si chaque $F_p V_\alpha M$ est cohérent sur $\mathcal{O}_X$, on a $f_*(M, F, V) \in D^-FV_c(\mathcal{D}_Y)$. Si l'action de $t\partial_t - \alpha$ sur $Gr_\alpha^V M$ est nilpotente, on a $f_*(M, F, V) \in D^-FV_m(\mathcal{D}_Y)$.

Preuve. Soit $(L^*, F, V) \xrightarrow{\sim} (M, F, V)$ la résolution canonique des Modules induits dans 3.3.9. Si $F_p V_\alpha M$ sont cohérents, alors $F_p V_\alpha L^i$ sont cohérents, donc $\mathcal{H}^i(F_p V_\alpha DR_{X/Y} L^*)$ et $\mathcal{H}^i(\mathbf{R}f_* F_p V_\alpha DR_{X/Y} L^*)$ sont cohérents sur $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$.

Si $(t\partial_t - \alpha)^m: Gr_\alpha^V M \rightarrow Gr_\alpha^V M$ est nul, $(t\partial_t - \alpha)^m: (Gr_\alpha^V L^*, F) \rightarrow (Gr_\alpha^V L^*, F)$ est nul dans $DF(\mathcal{D}_{X_0})$ donc l'action de $(t\partial_t - \alpha)^m$ sur $\mathcal{H}^i f_{0*} Gr_\alpha^V L^* \simeq \mathcal{H}^i Gr_\alpha^V f_* L^*$ est nulle; d'où l'assertion.

3.3.17. Proposition. Soit $f: X \rightarrow Y$ comme dans 3.3.15, posons $f_0 = f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y_0$. Soit (M, F) un $\mathcal{D}_X$ -Module filtré cohérent, quasi-unipotent et régulier le long de X_0 . Supposons que $f_{0*}Gr_\alpha^V(M, F)$ soit strict pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $f_*(M, F, V)$ est strict dans un voisinage de Y_0 , la filtration induite de $\mathcal{H}^i f_*(M, F)$ par V est la filtration de Malgrange-Kashiwara, $\mathcal{H}^i f_*(M, F)$ est quasi-unipotent et régulier le long de Y_0 , et $Gr_\alpha^V \mathcal{H}^i f_*(M, F) \simeq \mathcal{H}^i f_* Gr_\alpha^V(M, F)$.

Preuve. Puisque f est propre, et $Gr_\alpha^V(M, F)$, (M, F) sont cohérents, il existe un épimorphisme strict localement (rel. à Y):

$$\bigotimes_{p, \alpha} F_p V_\alpha \otimes (\mathcal{D}_X, F[p], V[\alpha]) \rightarrow (M, F, V)$$

où la somme directe est étendue sur un nombre fini de p, α (d'après le lemme de Nakayama). Par le même argument que dans 3.3.9, on obtient localement (relatif à Y) une résolution de (M, F, V) par des Modules induits cohérents, donc on voit que $\mathcal{H}^i V_\alpha f_* M$ (resp. $\mathcal{H}^i f_*(M, F) \in MG(\mathcal{B}_Y)$) sont cohérents sur $V_0 \mathcal{D}_Y$ (resp. $\mathcal{B}_Y$), donc l'assertion résulte de 3.3.3, 3.3.5 et de 3.3.16, car $V_\alpha \mathcal{H}^i f_* M =$

$\mathcal{H}^i f_* M$ sur $Y \setminus Y_0$.

3.4. Cycles evanescents (cf. [17], [22])

3.4.1. Soit $p: X \rightarrow S$ un morphisme lisse sur un disque ouvert S . Soient $X_0 = p^{-1}(0)$, $S_0 = \{0\}$, et t la coordonnée de $S (\subset \mathbb{C})$. On définit $MV(p^{-1}\mathcal{D}_S)$ comme dans 3.3.1, i.e. $(M, V) \in MV(p^{-1}\mathcal{D}_S)$ sii :

$$(3.4.1.1) \quad \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} V_\alpha M = M,$$

$$(3.4.1.2) \quad (V_\alpha M) (V_\beta p^{-1}\mathcal{D}_S) \subset V_{\alpha+\beta} M,$$

$$(3.4.1.3) \quad t: V_\alpha M \xrightarrow{\sim} V_{\alpha-1} M \quad (\alpha < 0).$$

Soit $DV(p^{-1}\mathcal{D}_S)$ la catégorie dérivée correspondante. On définit $DV_m(p^{-1}\mathcal{D}_S)$ comme dans 3.3.1, et $DV_c(p^{-1}\mathcal{D}_S)$ par :

$(M^*, V) \in DV_c(p^{-1}\mathcal{D}_S)$ sii $\mathcal{H}^i V_\alpha M_x^*$ est de type fini sur $\mathcal{O}_{S,0}$ pour tout $x \in X_0$.

3.4.2. Lemme. Si $(M^*, V) \in D^- V_{m,c}(p^{-1}\mathcal{D}_S)$, alors (M^*, V) est strict et $\mathcal{H}^i V_\alpha M_x^*$ est libre sur $\mathcal{O}_{S,0}$ pour $x \in X_0$, $\alpha < 0$.

(Même démonstration que 3.3.2 et 3.3.3.)

3.4.3. Soient $S^* = S \setminus \{0\}$, et $\pi: \tilde{S}^* \rightarrow S^*$ un revêtement universel; posons

$$\tilde{X}^* = X \times_S \tilde{S}^*, \quad j: \tilde{X}^* \rightarrow X, \quad i: X_0 \rightarrow X.$$

On définit les foncteurs ψ et ϕ de $D(A)$ dans $D(A|_{X_0})$ pour $A = \mathcal{C}_X, p^{-1}\mathcal{D}_S$, etc., par :

$$\psi L^* = i^{-1} Rj_* j^{-1} L^*$$

$$\phi L^* = \text{Cone}(i^{-1} L^*[-1] \rightarrow i^{-1} Rj_* j^{-1} L^*[-1])[1], \quad \text{cf. [10].}$$

Posons $p_0: X_0 \rightarrow S_0 (= \{0\})$, $\bar{j}: \tilde{S}^* \rightarrow S$ et

$$\tilde{\mathcal{O}}^\alpha = t^\alpha \mathcal{C}\{t\} [\log t] \subset (\bar{j}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}^*})_0.$$

Soit $\alpha < 0$, on définit le foncteur $\psi_\alpha^{a,l}: DV(p^{-1}\mathcal{D}_S) \rightarrow DV(p_0^{-1}\mathcal{D}_{S,0})$ par :

$$\psi_\alpha^{a,l} M^* = i^{-1} V_\alpha M^* \otimes_{\mathcal{C}\{t\}} \tilde{\mathcal{O}}^\alpha [t^{-1}]$$

$$V_\beta(\psi_\alpha^{a,l} M^*) = i^{-1} V_{\alpha+\beta+[-\beta]} M^* \otimes_{\mathcal{C}\{t\}} \tilde{\mathcal{O}}^{\alpha+[-\beta]}$$

(notons que $V_\alpha M^j$ sont sans t -torsion pour $\alpha < 0$, et que $\tilde{\mathcal{O}}^\alpha [t^{-1}]$ est un $\mathcal{D}_{S,0}$ -module à gauche); on a alors un isomorphisme

$$\psi_{\alpha-1}^{a,l}(M^*, V) \simeq \psi_\alpha^{a,l}(M^*, V) \quad \text{si } \alpha < 0$$

et un morphisme naturel $\psi_{\alpha}^{aI} M^* \rightarrow \psi M^*$.

On définit $\widetilde{DR}_S \psi_{\alpha}^{aI} (M^*, V) \in DV(\mathcal{C}_{X_0})$ par

$$\text{Cone}(\partial_t: \psi_{\alpha}^{aI} M^* \rightarrow \psi_{\alpha}^{aj} M^*)$$

avec la filtration $V_{\beta} = \text{Cone}(\partial_t: V_{\beta-1} \psi_{\alpha}^{aI} M^* \rightarrow V_{\beta} \psi_{\alpha}^{aj} M^*)$.

Soient $(M^*, V) \in DV(p^{-1}\mathcal{D}_S)$ et $\alpha < 0$, on définit

$$A_{\alpha}: V_0 \widetilde{DR}_S \psi_{\alpha}^{aI} M^* \rightarrow Gr_{\alpha}^V M^* [1]$$

par $\text{Cone}(pr, 0): \text{Cone}(\partial_t: V_{-1} \psi_{\alpha}^{aI} M^* \rightarrow V_0 \psi_{\alpha}^{aI} M^*) \rightarrow \text{Cone}(Gr_{\alpha}^V M^* \rightarrow 0)$, où $pr: V_{-1} \psi_{\alpha}^{aI} M^* \rightarrow Gr_{\alpha}^V M$ est définie par:

$$\sum u_j \otimes t^{\alpha+1} (\log t)^j / j! \mapsto u_0 \quad \text{pour } u_j \in i^{-1} V_{\alpha} M.$$

On définit $B_{\alpha}: V_0 \widetilde{DR}_S \psi_{\alpha}^{aI} M^* \rightarrow \widetilde{DR}_S \psi_{\alpha}^{aI} M^* \rightarrow \widetilde{DR}_S \psi M^*$ par la composition des morphismes naturels.

3.4.4. Lemme. Si $(M^*, V) \in D^{-} V_{m,c}(p^{-1}\mathcal{D}_S)$, A_{α} est un isomorphisme.

Preuve. En utilisant la filtration canonique sur M^* , on peut supposer que $(M, V) \in MV_{m,c}(p^{-1}\mathcal{D}_S)$, car (M, V) est strict et le foncteur $\bigotimes_{\mathcal{C}^{(t)}} \tilde{\mathcal{O}}^{\alpha}$ est exact. Par définition, l'action de ∂_t sur $\psi_{\alpha}^{aI} M$ s'écrit

$$(3.4.4.1) \quad (u \otimes t^{\alpha+1} (\log t)^j / j!) \partial_t \\ = u(t\partial_t - \alpha) \otimes t^{\alpha} (\log t)^j / j! - u \otimes t^{\alpha} (\log t)^{j-1} / (j-1)!$$

si $u \in i^{-1} V_{\alpha} M$. Soit W la filtration de $\psi_{\alpha}^{aI} M$ par degré de $\log t$. Puisque $V_{\beta} M_x$ est un $\mathcal{C}\{t\}$ -module libre de type fini pour $x \in X_0$ ($\beta < 0$), et l'action de $t\partial_t - \alpha$ sur $Gr_{\beta}^V M$ est bijectif si $\alpha \neq \beta$, $t\partial_t - \alpha: V_{\beta} M_x \rightarrow V_{\beta} M_x$ est bijectif si $\alpha > \beta$; donc $Gr_i^W V_{<0} \widetilde{DR}_S \psi_{\alpha}^{aI} M$ et $V_{<0} \widetilde{DR}_S \psi_{\alpha}^{aI} M$ sont acycliques ($\alpha < 0$). Puisque $V_{<-1} \psi_{\alpha}^{aI} M = i^{-1} V_{<\alpha} M^* \otimes \tilde{\mathcal{O}}^{\alpha+1}$ et $pr(V_{<-1} \psi_{\alpha}^{aI} M) = 0$, il reste à démontrer que

$$(pr, 0): Gr_0^V DR_S \psi_{\alpha}^{aI} (M, V) \rightarrow Gr_{\alpha}^V M [1]$$

est un isomorphisme. On peut supposer que $(Gr_{\alpha}^V M)(t\partial_t - \alpha) = 0$ en utilisant une filtration de $Gr_{\alpha}^V M$, car $t\partial_t - \alpha$ est nilpotente sur $Gr_{\alpha}^V M$; on a alors

$$(W_i Gr_{-1}^V \psi_{\alpha}^{aI} M) \partial_t \subset W_{i-1} Gr_0^V \psi_{\alpha}^{aI} M$$

et

$$\partial_t: Gr_i^W Gr_{-1}^V \psi_{\alpha}^{aI} M \xrightarrow{\sim} Gr_{i-1}^W Gr_0^V \psi_{\alpha}^{aI} M \quad (i \geq 1),$$

car $Gr_{-j}^V \psi_{\alpha}^{aI} M = i^{-1} Gr_{\alpha}^V M \otimes_{\mathcal{C}} t^{\alpha+j} \mathcal{C}[\log t]$ pour $j=0, 1$; d'où l'assertion.

3.4.5. Lemme. Soient $x_0 \in X_0$ et $B_\varepsilon = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$, où on choisit des coordonnées de X pour définir la norme $\|\cdot\|$. Posons $p_\varepsilon = p|_{B_\varepsilon}$. Soit $(M^*, V) \in D^-V_m(p^{-1}\mathcal{D}_S)$. Si $R^i p_{\varepsilon*} V_\alpha M^*$ est cohérent sur $\mathcal{O}_S$ dans un voisinage de 0 pour $1 \gg \varepsilon > 0$, alors

$$\bigoplus_{-1 < \alpha < 0} B_\alpha : \bigoplus_{-1 < \alpha < 0} (V_0 \widetilde{DR}_S \psi_\alpha^{a_i} M^*)_{x_0} \rightarrow (\widetilde{DR}_S \psi M^*)_{x_0}$$

et est un isomorphisme.

Preuve. Puisque l'action de $t\partial_t - \alpha$ sur $Rp_{\varepsilon*} Gr_\alpha^V M^*$ est nilpotente, $Rp_{\varepsilon*}((V_\alpha/V_\beta)/M, V)$ est strict, donc $R^i p_{\varepsilon*} V_\alpha M^*$ est libre sur $\mathcal{O}_S$ dans un voisinage de 0 ($\alpha < 0$) et $Rp_{\varepsilon*}(M^*, V)$ est strict par le même argument que 3.3.2, 3.3.3 et 3.4.2 (notons que $R^i p_{\varepsilon*} V_\alpha M^*|_{S^*}$ ne dépend pas de α .)

Si $p = id$ (i.e. $X = S$), $(M, V) \in MV_m(\mathcal{D}_S)$ et $V_\alpha M$ est cohérent sur $\mathcal{O}_S$, alors $\bigoplus B_\alpha$ est un isomorphisme par la théorie classique des équations différentielles d'une variable à singularités régulières; en particulier, $H^i(V_0 \widetilde{DR}_S \psi_\alpha^{a_i} M) = H^i(\widetilde{DR}_S \psi M) = 0$ si $i \neq -1$. On a donc

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus \mathcal{H}^i V_0 \widetilde{DR}_S \psi_\alpha^{a_i} M_{x_0} & \simeq & \bigoplus \lim_{\xrightarrow{\varepsilon}} H^i V_0 \widetilde{DR}_S \psi_\alpha^{a_i} Rp_{\varepsilon*} M & \simeq & \bigoplus \lim_{\xrightarrow{\varepsilon}} (V_0 \widetilde{DR}_S \psi_\alpha^{a_i} R^{i+1} p_{\varepsilon*} M)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ (\mathcal{H}^i \widetilde{DR}_S \psi M)_{x_0} & \simeq & \lim_{\xrightarrow{\varepsilon}} H^i \widetilde{DR}_S \psi Rp_{\varepsilon*} M & \simeq & \lim_{\xrightarrow{\varepsilon}} (\widetilde{DR}_S \psi R^{i+1} p_{\varepsilon*} M)[-1] \end{array}$$

d'où l'assertion.

3.4.6. Lemme. Soit (M, F) un $\mathcal{D}_X$ -Module cohérent, quasi-unipotent et régulier le long de X_0 (cf. 3.2), alors $Gr^F V_\alpha M$ est cohérent sur $Gr^F V_0 \mathcal{D}_X$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Preuve. On peut supposer que $\alpha < 0$, car $Gr^F Gr_\alpha^V M$ sont cohérents sur $Gr^F \mathcal{D}_{X_0}$ et $Gr^F Gr_0^V \mathcal{D}_X \simeq Gr^F \mathcal{D}_{X_0}[t\partial_t]$. Puisque chaque $Gr_p^F V_\alpha M$ est cohérent sur $\mathcal{O}_X$, il suffit de montrer que $Gr^F V_\alpha M$ est localement de type fini sur $Gr^F V_0 \mathcal{D}_X$, i.e. il existe localement $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(3.4.6.1) \quad (Gr_p^F V_\alpha M) (Gr_i^F V_0 \mathcal{D}_X) = Gr_{p+i}^F V_\alpha M \quad \text{pour tout } i \geq 0.$$

Puisque $V_\alpha M = M$ et $V_0 \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_X$ sur X^* , on a localement (rel. à X) $p_1 \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait (3.4.6.1) sur X^* . D'autre part, $Gr^F Gr_\alpha^V M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0}$ est cohérent sur $Gr^F \mathcal{D}_{X_0}$, donc on trouve aussi localement $p_2 \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait (3.4.6.1) sur X_0 , par le lemme de Nakayama. Posons $p = \max\{p_1, p_2\}$, alors l'assertion est claire.

3.4.7. Corollaire. Soient $p: X \rightarrow S (\subset C)$ un morphisme lisse et $X_0 = p^{-1}(0)$.

Soit $\mathcal{D}_{X/S} = \{P \in \mathcal{D}_X : [P, t] = 0\}$ où t est la coordonnée de S . Soit (M, F) comme dans 3.4.6, alors $Gr^F V_{\omega} M$ est cohérent sur $Gr^F \mathcal{D}_{X/S}$ dans un voisinage de X_0 .

Preuve. On peut supposer que $\alpha < 0$, alors, pour tout $x \in X_0$, $Gr^F V_{\omega} M_x$ est de type fini sur $Gr^F \mathcal{D}_{X/S, x}$ par le même argument que dans 3.4.6, car $Gr^F \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_0} \simeq Gr^F \mathcal{D}_{X_0}$; donc il existe un $Gr^F \mathcal{D}_{X/S}$ -Module gradué cohérent N dans un voisinage de x tel que $N_x = Gr^F V_{\omega} M_x$; de plus, on peut supposer que l'action de $t\partial_t$ sur $Gr^F V_{\omega} M_x$ est prolongée sur N , alors N est un $Gr^F V_0 \mathcal{D}_X$ -Module car $Gr^F V_0 \mathcal{D}_X = Gr^F \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t\partial_t]$, et N est cohérent sur $Gr^F V_0 \mathcal{D}_X$, donc $N = Gr^F V_{\omega} M$ dans un voisinage de x ; d'où l'assertion. (Notons que la condition sur (M, F) implique que $\text{supp}(Gr^F V_{\omega} M)^{\sim} \subset \text{Specan } Gr^F V_0 \mathcal{D}_X$ est fini sur $\text{Specan } Gr^F \mathcal{D}_{X/S}$ dans un voisinage de $(\text{Specan } Gr^F V_0 \mathcal{D}_X)|_{X_0}$.)

3.4.8. Proposition. Soient $p: X \rightarrow S$, X_0 et (M, F) comme dans 3.4.7, soit V la filtration rationnelle de M . Si M est holonome, alors $DR_{X/S}(M, V) \in D^{-} V_m(\mathcal{D}_X)$ satisfait la condition de 3.4.5.

Preuve. D'après 3.4.7, $DR_{X/S} V_{\omega} M \simeq V_{\omega} M \otimes_{\mathcal{D}_{X/S}}^L \mathcal{O}_X$ est localement représenté par un complexe borné supérieurement de $\mathcal{D}_{X/S}$ -Modules dont les différentielles sont $p^{-1} \mathcal{O}_S$ -linéaires. Pour appliquer un résultat de Kiehl-Verdier [20] (voir aussi [15]), il suffit de montrer:

3.4.9. Lemme. Soient B_{ϵ} et p_{ϵ} comme dans 3.4.5, alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon_1 \in]0, \epsilon_0[$, il existe $\epsilon_2 \in]0, \epsilon_1[$ et $\eta > 0$ tels que

$$R^i p_{\epsilon*} DR_{X/S} V_{\omega} M|_{S_{\eta}} \text{ ne dépend pas de } \epsilon \in [\epsilon_2, \epsilon_1],$$

où $S_{\eta} = \{|t| < \eta\}$.

Preuve. D'après [19, 4.4.1 et la preuve de 8.6.2] il suffit de montrer que

$$SS(DR_{X/S} V_{\omega} M) \subset \bigcup_{\lambda} (T_{X_{\lambda}}^* X + X \times_S T^* S)$$

dans un voisinage de x_0 pour une stratification $\{X_{\lambda}\}$ satisfaisant la condition A_f de Thom rel. à la stratification $S = S^* \cup \{0\}$. Notons que la condition A_f implique que le terme à droite est fermé.

Soit $\{X_{\lambda}\}$ une stratification de X telle que $\text{Car}(M) \subset \bigcup_{\lambda} T_{X_{\lambda}}^* X$; d'après Hiro-naka [14], on peut supposer que $\{X_{\lambda}\}$ satisfait la condition A_f au voisinage de x_0

Soit $T^*(X/S) = \text{Coker}(X \times_S T^*S \hookrightarrow T^*X) (\simeq \text{Specan } Gr^F \mathcal{D}_{X/S})$ et $\phi: T^*X \rightarrow T^*(X/S)$ la projection, cf. [15]. D'après [19, 10.1.5], on a

$$SS(DR_{X/S} V_\alpha M) = \text{Car}(V_\alpha M \otimes_{\mathcal{D}_{X/S}} \mathcal{D}_X) = \phi^{-1} \text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(V_\alpha M)$$

où $\text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(V_\alpha M) = \text{supp}(Gr^F V_\alpha M)^\sim \subset T^*(X/S)$. Si $\alpha < 0$, $Gr^F V_\alpha M$ est sans t -torsion, donc

$$\text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(V_\alpha M) = \overline{\text{Car}_{\mathcal{D}_{X^*/S^*}}(M|_{X^*})}, \quad \text{car } V_\alpha M|_{X^*} = M|_{X^*};$$

de plus, $\text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(V_\alpha M)|_{X_0} = \text{Car}(V_\alpha M/V_{\alpha-1}M) = \bigcup_{\beta \leq \alpha} \text{Car}(Gr_\beta^V M) (\subset T^*X_0)$.

Puisque $\text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(M) = \phi \text{Car}(M)$ si $\text{Car}(M)$ est finie sur $T^*(X/S)$, on obtient l'assertion pour $\alpha < 0$. Si $\alpha \geq 0$ on peut supposer que $\partial_t: Gr_{-1}^V M \rightarrow Gr_0^V M$ est surjectif, cf. 3.1.8, car, si $\text{supp } M \subset X_0$, i.e. $M = i_* M_0$ avec $i: X_0 \hookrightarrow X$, $\text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(V_\alpha M) = \text{Car } M_0$ ($\alpha \geq 0$); on a alors

$$\text{Car}(Gr_0^V M) \subset \text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(V_{<0} M)$$

donc

$$\text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(V_\alpha M) = \text{Car}_{\mathcal{D}_{X/S}}(V_{<0} M) \quad \text{pour tout } \alpha;$$

d'où l'assertion. Ce qui achève la démonstration de 3.4.8.

Remarque. Cette démonstration montre que $Gr_\alpha^V M$ sont holonomes, si (M, F) est un $\mathcal{D}_X$ -Module holonome filtré, quasi-unipotent et régulier le long de X_0 .

3.4.10. Soit $(M^*, F) \in DV(p^{-1}\mathcal{D}_S)$, posons

$$\phi_\alpha^{aI}(M, V) = \psi_\alpha^{aI}(M, V) \quad \text{pour } -1 < \alpha < 0.$$

On définit ϕ_0^{aI} par

$$\phi_0^{aI}(M, V) = \text{Cône}(i^{-1}(M, V) \rightarrow \psi_{-1}^{aI}(M, V))$$

où $i^{-1}M \rightarrow \psi_{-1}^{aI}M$ est défini par

$$u \mapsto -u t^{1-[-\alpha]} \otimes t^{[-\alpha]-1} \quad \text{pour } u \in i^{-1}V_\alpha M.$$

On définit $\widetilde{DR}_S \phi_0^{aI}(M, V)$ comme dans 3.4.3, i.e.

$$V_\alpha \widetilde{DR}_S \phi_0^{aI} M = \text{Cône}(\partial_t: V_{\alpha-1} \phi_0^{aI} M \rightarrow V_\alpha \phi_0^{aI} M).$$

Posons $\psi^{aI} = \bigoplus_{-1 \leq \alpha < 0} \psi_\alpha^{aI}$, $\phi^{aI} = \bigoplus_{-1 < \alpha \leq 0} \phi_\alpha^{aI}$, alors

$$\phi^{aI}(M, V) = \text{Cône}(i^{-1}(M, V) \rightarrow \psi^{aI}(M, V)).$$

On a un morphisme naturel

$$\text{can}: \psi^{aI} \rightarrow \phi^{aI} \quad (\text{resp. can}: \psi \rightarrow \phi)$$

défini par

$$(0, id): \text{Cône}(0 \rightarrow \psi^{(aI)}(M, V)) \rightarrow \text{Cône}(i^{-1}(M, V) \rightarrow \psi^{(aI)}(M, V)),$$

alors les morphismes naturels $\psi^{aI}M \rightarrow \psi M$ et $\phi^{aI}M \rightarrow \phi M$ commutent avec can.

Soit T la monodromie. On définit l'action de T_s et de T_u sur $\tilde{\mathcal{O}}^a$ par

$$T_s(t^a(\log t)^j) = \exp(2\pi i \alpha) t^a(\log t)^j$$

$$T_u(t^a(\log t)^j) = t^a(\log t + 2\pi i)^j$$

et leur action sur ψ^{aI} et ϕ^{aI} par

$$T_*(m \otimes q) = m \otimes T_*q \quad \text{pour } * = s, u, \quad m \in M, g \in \tilde{\mathcal{O}}^a,$$

alors on obtient la décomposition de Jordan $T = T_s T_u$ sur ψ^{aI} et ϕ^{aI} .

Posons $N = (\log T_u)/2\pi i$, alors $N(\log t)^j = j(\log t)^{j-1}$. On définit

$$\text{Var}: \phi_0^{aI} \rightarrow \psi_{-1}^{aI} \quad \text{par}$$

$$(0, N): \text{Cône}(i^{-1}(M, V) \rightarrow \psi_{-1}^{aI}(M, V)) \rightarrow \text{Cône}(0 \rightarrow \psi_{-1}^{aI}(M, V))$$

et var: $\psi^{aI}M \rightarrow \phi^{aI}M$ (resp. var: $\psi M \rightarrow \phi M$) par

$$(0, T-id): \text{Cône}(i^{-1}M \rightarrow \psi^{(aI)}M) \rightarrow \text{Cône}(0 \rightarrow \psi^{(aI)}M),$$

alors $\text{Var} \circ \text{can} = N$, $\text{can} \circ \text{Var} = N$, $\text{can} \circ \text{var} = T - id$, $\text{var} \circ \text{can} = T - id$.

Soit $B_0: V_0 \tilde{D}R_S \phi_0^{aI} M \rightarrow \tilde{D}R_S \phi M$ le morphisme naturel; alors $\bigoplus_{-1 < a \leq 0} B_a: V_0 \tilde{D}R_S \phi^{aI} M \rightarrow \tilde{D}R_S \phi M$ est un isomorphisme, si $\bigoplus_{-1 \leq a < 0} B_a: V_0 \tilde{D}R_S \psi^{aI} M \rightarrow \tilde{D}R_S \psi M$ l'est et si $(M, V) \in D^- V_{m,c} p^{-1} \mathcal{D}_S$ (car $\partial_t: Gr_{a-1}^V M \rightarrow Gr_a^V M$ est un isomorphisme si $a > 0$), de plus, $\bigoplus B_a$ commute avec can, var et l'action de T .

On définit le morphisme $A_0: V_0 \tilde{D}R_S \phi_0^{aI} M \rightarrow Gr_0^V M[1]$ par

$$\begin{array}{c} \text{Cône} \left[\begin{array}{ccc} i^{-1} V_0 M & \rightarrow & V_0 \psi_{-1}^{aI} M \\ \partial_t \uparrow & & \partial_t \uparrow \\ i^{-1} V_{-1} M & \rightarrow & V_{-1} \psi_{-1}^{aI} M \end{array} \right] \xrightarrow{(pr, A_{-1})} \\ \text{Cône} \left[\begin{array}{ccc} Gr_0^V M & \longrightarrow & 0 \\ \partial_t \uparrow & & \uparrow \\ Gr_{-1}^V M & \xrightarrow{-id} & Gr_{-1}^V M \end{array} \right] \xleftarrow{\begin{pmatrix} -id, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}} Gr_0^V M[1] \end{array}$$

où $pr: i^{-1} V_a M \rightarrow Gr_a^V M$ ($a = -1, 0$). Ici

$$\text{Cône} \begin{bmatrix} K^{-1,0} & \xrightarrow{\alpha} & K^{0,0} \\ \beta' \uparrow & & \beta \uparrow \\ K^{-1,-1} & \xrightarrow{\alpha'} & K^{0,-1} \end{bmatrix}$$

est le complexe simple associé au complexe double

$$[K^{-1,-1} \xrightarrow{(\alpha', -\beta')} K^{0,-1} \oplus K^{-1,0} \xrightarrow{\alpha+\beta} K^{0,0}].$$

3.4.11. Lemme. A_0 est un isomorphisme, si $(M, V) \in D^- V_{m,c}(p^{-1}\mathcal{D}_S)$. On a

$$A_\alpha N = (t\partial_t - \alpha) A \quad \text{pour} \quad -1 \leq \alpha \leq 0,$$

$$A_0 \text{ can} = \partial_t A_{-1}, \quad A_{-1} \text{ Var} = tA_0 \quad \text{dans} \quad D(C_{X_0}).$$

Preuve. La première assertion résulte de l'isomorphisme

$$\partial_t: i^{-1} V_{<-1} M \xrightarrow{\sim} i^{-1} V_{<0} M \quad \text{pour} \quad M \in MV_{m,c}(p^{-1}\mathcal{D}_S)$$

démontré dans la preuve de 3.4.4. Pour $-1 \leq \alpha < 0$, on définit

$$h: V_0 \widetilde{DR}_S \psi_\alpha^{a'} M \rightarrow Gr_\alpha^V M$$

par $(0, pr): \text{Cône}(V_{-1} \psi_\alpha^{a'} M \rightarrow V_0 \psi_\alpha^{a'} M) \rightarrow Gr_\alpha^V M$, alors $dh + hd = (t\partial_t - \alpha) A_\alpha - A_\alpha N$ d'après (3.4.4.1), on a donc

$$(t\partial_t - \alpha) A_\alpha = A_\alpha N \quad \text{dans} \quad D(C_{X_0}) \quad \text{pour} \quad -1 \leq \alpha < 0,$$

où cette assertion pour $\alpha = 0$ résulte des dernières assertions, car $N = \text{can} \circ \text{Var}$.

Par définition, on a la factorisation $A_0 = A_0''^{-1} A_0'$, où $A_0' = (pr, A_{-1})$ et $A_0'' = \begin{pmatrix} -id, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$. On définit

$$\text{can}': Gr_{-1}^V M[1] \rightarrow \text{Cône} \begin{bmatrix} Gr_0^V M & \longrightarrow & 0 \\ \partial_t \uparrow & & \uparrow \\ Gr_{-1}^V M & \xrightarrow{-id} & Gr_{-1}^V M \end{bmatrix}$$

par $\begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, id \end{pmatrix}$, alors $A_0' \text{ can} = \text{can}' A_{-1}$. On définit

$$h: Gr_{-1}^V M[1] \rightarrow \text{Cône} \begin{bmatrix} Gr_0^V M & \longrightarrow & 0 \\ \partial_t \uparrow & & \uparrow \\ Gr_{-1}^V M & \xrightarrow{-id} & Gr_{-1}^V M \end{bmatrix} \quad \text{par} \quad \begin{pmatrix} 0, 0 \\ id, 0 \end{pmatrix},$$

alors $dh + hd = A_0'' \partial_t - \text{can}'$, donc $A_0 \text{ can} = \partial_t A_{-1}$ dans $D(C_{X_0})$.

On définit un sous-complexe de $Gr_0^V \widetilde{DR}_S \phi_0^{a_1} M$ par

$$C = \text{C\^one} \left[\begin{array}{ccc} Gr_0^V M & \rightarrow & Gr_0^V \psi_{-1}^{a_1} M \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & (Gr_{-1}^V \psi_{-1}^{a_1} M) (\log t) \end{array} \right].$$

Soient $V_0 \widetilde{DR}_S \phi_0^{a_1} M \xrightarrow{a_1} Gr_0^V \widetilde{DR}_S \phi_0^{a_1} M \xleftarrow{a_2} C \xrightarrow{a_3} Gr_0^V M[1]$ les isomorphismes naturels, où $a_3 = \begin{pmatrix} -id, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$; on a alors la factorisation $A'_0 = \bar{A}'_0 a_1$, et on vérifie $\bar{A}'_0 a_2 = A''_0 a_3$; donc $a_3 a_2^{-1} a_1 = A_0$.

Soit $a'_1: V_0 \widetilde{DR}_S \psi_{-1}^{a_1} M \rightarrow Gr_0^V \widetilde{DR}_S \psi_{-1}^{a_1} M$ l'isomorphisme naturel, on a alors la factorisation $A_{-1} = \bar{A}_{-1} a'_1$ et $\text{Var} \circ a_1 = a'_1 \circ \text{Var}$. On définit $h: C \rightarrow Gr_{-1}^V M$ par $\begin{pmatrix} 0, pr \\ 0, 0 \end{pmatrix}$, où

$$pr: Gr_0^V \psi_{-1}^{a_1} M = Gr_{-1}^V M \otimes t^{-1} C[\log t] \rightarrow Gr_{-1}^V M$$

est définie par $pr(\sum u_j \otimes t^{-1}(\log t)^j) = u_0$; alors $hd + dh = ta_3 - \bar{A}_{-1} \circ \text{Var} \circ a_2$, donc $tA_0 = A_{-1} \circ \text{Var}$ dans $D(C_{X_0})$. Ce qui achève la démonstration.

3.4.12. Proposition (cf. [17], [22]). *Si M est holonome, posons $K = DR_X M$, on a alors la décomposition de Jordan $T = T_s T_u$ de la monodromie T de ψK et de ϕK (voir aussi 3.4.14). Posons*

$$\psi_\lambda K = \text{Ker}(T_s - \lambda: \psi K \rightarrow \psi K) \quad (\text{de même pour } \phi_\lambda K).$$

Si (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de X_0 (et M holonome), alors A_ω et B_β induisent des isomorphismes

$$DR_{X_0}(Gr_\omega^V M) \simeq \begin{cases} \psi_{e(\omega)} K[-1] & \text{si } -1 \leq \alpha < 0 \\ \phi_{e(\omega)} K[-1] & \text{si } -1 < \alpha \leq 0 \end{cases}$$

tels que $t\partial_t - \alpha$, ∂_t , t sont identifiés avec N , can , Var , où $e(\alpha) = \exp 2\pi i \alpha$.

Preuve. Puisque il existe le polynôme minimal pour l'action de T (au moins localement), on a la décomposition de Jordan, car $\psi K[-1]$ et $\phi K[-1]$ sont des faisceaux pervers. D'après 3.4.4, 3.4.5 et 3.4.8, A_ω et $\oplus B_\omega$ sont des isomorphismes, de plus

$$\text{Im}(B_\omega: V_0 \widetilde{DR}_S \psi_\omega^{a_1} DR_{X/S} M \rightarrow \widetilde{DR}_S \psi DR_{X/S} M \simeq \psi DR_X M) = \psi_{e(\omega)} K$$

(de même pour ϕ), car l'action de $t\partial_t - \alpha$ sur $\mathcal{H}^i(\text{Im } B_\omega)$ est nilpotente et l'image de $\text{Im } B_\omega$ par la projection $\psi K \rightarrow \psi_\lambda K$ est nulle si $\lambda \neq e(\alpha)$ (voir aussi 3.4.14). Puisque

$$Gr_{\alpha}^V DR_{X/S} M \simeq DR_{X_0} Gr_{\alpha}^V M,$$

l'assertion résulte de 3.4.11.

3.4.13. Remarque. Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre, $q: Y \rightarrow S$ un morphisme lisse, tels que $p=qf$ soit lisse. Soit (M, F) un $\mathcal{D}_X$ -Module holonome filtré, quasi-unipotent et régulier le long de X_0 . Si $f_*(M, F, V)$ est strict, et si, de plus, $\mathcal{H}^i f_*(M, F, V)$ sont quasi-unipotents et réguliers le long de Y_0 , 3.4.12 (pour (M, F)) induit un isomorphisme

$$DR_{Y_0}(Gr_{\alpha}^V \mathcal{H}^i f_* M) \simeq \psi_{e(\omega)}^p \mathcal{H}^i f_* DR_X M[-1] \quad (\text{ou } \phi)$$

(car $DR_{Y_0}(Gr_{\alpha}^V f_* M) \simeq \psi_{e(\omega)}^p f_* DR_X M[-1]$ (ou ϕ)) qui coïncide avec l'isomorphisme donné par 3.4.12 appliquée à $\mathcal{H}^i f_*(M, F)$ (notons que $DR_Y \mathcal{H}^i f_* M = {}^p \mathcal{H}^i f_* DR_X M$), car les morphismes A_{α} et B_{β} sont compatibles avec l'image directe par un morphisme propre.

3.4.14. Remarque. Soit X une variété complexe. Soit $D_c(A_X, T)$ la catégorie dérivée des complexes des A_X -Modules munis d'un automorphisme T , cohomologiquement constructibles, où A est un corps. Soit $\tilde{A} = A[T, T^{-1}]$, alors cette catégorie est équivalente à $D_c(\tilde{A}_X)$ la catégorie dérivée des complexes des $\tilde{A}_X$ -Modules, cohomologiquement constructible sur A . D'après [33], celle-ci est équivalente à la sous-catégorie pleine $D_c(\tilde{A}_X)_{\text{inj}}$ des complexes des $\tilde{A}_X$ -Modules injectifs. Pour P un polynôme unitaire irréductible sur A , tel que $P(0) \neq 0$, on définit le foncteur:

$${}_P(\quad): D_c(\tilde{A}_X)_{\text{inj}} \rightarrow D(\tilde{A}_X)$$

par ${}_P K = \bigcup_i \text{Ker}(P(T)^i: K \rightarrow K)$ pour $K \in D_c(\tilde{A}_X)_{\text{inj}}$. Alors on a ${}_P K \in D_c(\tilde{A}_X)$ et le morphisme canonique: $\bigoplus {}_P K \rightarrow K$ est un isomorphisme dans $D_c(\tilde{A}_X)$. (Notons que le foncteur $K \mapsto {}_P K$ est bien défini, si $P: K^i \rightarrow K^j$ sont surjectifs.)

En effet, soit W la filtration canonique τ de K , alors par la résolution de Cartan-Eilenberg, on a une résolution filtrée: $(K, W) \xrightarrow{\sim} (L, W)$ telle que $Gr_j^W L$ soient des complexes bornés de $\tilde{A}_X$ -Modules injectifs; donc on peut supposer que $\mathcal{H}^j K = 0$ pour $j \neq 0$, et de plus que $\mathcal{H}^0 K \simeq j_! L$ pour L un système local sur U un ouvert de Zariski lisse de X , avec $j: U \rightarrow X$ l'inclusion naturelle (par dévissage). Puisque ${}_P K$ est acyclique si K l'est, on peut supposer que $U=X$, et de plus que $X=pt$ avec L un $\tilde{A}$ -module irréductible, car l'assertion est locale (et par dévissage); on a donc $L = \tilde{A}/\tilde{A}Q$ pour Q un polynôme unitaire irréductible tel que $Q(0) \neq 0$, alors ${}_P K = 0$ ($P \neq Q$) est clair, donc il suffit de vérifier que ${}_P K \xrightarrow{\sim} K$. Soient $S = \text{Spec } \tilde{A}$, $q = (Q) \in S$, $B = \mathcal{O}_{S,q}$ et F le corps des fractions de

B , alors B est un anneau de valuation discrète muni d'une uniformisante Q ; on a donc une suite exacte:

$$0 \rightarrow L \rightarrow F/B \xrightarrow{Q} F/B \rightarrow 0,$$

d'où l'assertion, car ${}_Q(F/B) = F/B$.

On applique l'assertion à ψK (ou ϕK) avec T la monodromie. On obtient la décomposition $\psi K = \bigoplus_p (\psi K)$ et l'action de N :

$$N: \psi K \rightarrow \psi K(-1) \quad (\text{de même pour } \phi).$$

Notons que l'action de $P(T)$ sur $i^{-1}Rj_*j^{-1}L$ (cf. 3.4.3) est surjective, si L est un faisceau flasque (et si $P(0) \neq 0$).

3.5. Le cas non-caractéristique

3.5.1. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés complexes lisses, soit (M, F) un $\mathcal{D}_Y$ -Module filtré cohérent. On dit que f est non-caractéristique pour (M, F) (ou (M, F) l'est pour f) si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$(3.5.1.1) \quad \mathcal{H}^i(f^{-1}Gr^F M \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}^L \mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{pour } i \neq 0,$$

$$(3.5.1.2) \quad \begin{aligned} &\text{le morphisme } df^*: (pr_2)^{-1} \text{Car}(M) \rightarrow T^*X \text{ soit fini,} \\ &\text{où } pr_2: X \times_{T^*Y} T^*Y \rightarrow T^*Y \text{ est la projection naturelle} \\ &\text{et } df^*: X \times_{T^*Y} T^*Y \rightarrow T^*Y \text{ est défini par } df^*(x, \xi) = \\ &df^*\xi \text{ pour } x \in X, \xi \in T_{f(x)}^*Y. \end{aligned}$$

On dit que f est strictement non-caractéristique pour (M, F) si la condition (3.5.1.1) et la condition suivante sont satisfaites:

$$(3.5.1.3) \quad \begin{aligned} &\text{il existe une stratification de Whitney } \{Y_\alpha\} \text{ de } Y \\ &\text{telle que } \text{Car}(M) \subset \bigcup_\alpha T_{Y_\alpha}^*Y \text{ et que} \\ &df^*: (pr_2)^{-1}(\bigcup_\alpha T_{Y_\alpha}^*Y) \rightarrow T^*X \text{ soit fini.} \end{aligned}$$

Notons que la condition (3.5.1.3) entraîne que M est holonome.

Lorsque f est une immersion fermée, X est dite (strictement) non-caractéristique pour (M, F) si f l'est.

Si f est non-caractéristique pour (M, F) , on définit

$$\begin{aligned} f^*(M, F) &= (\tilde{M}, F)[-d], \\ f^1(M, F) &= f^*(M, F)(d)[2d] \end{aligned}$$

$$\text{par } \tilde{M} = f^{-1}M \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \omega_{X/Y}, F_p \tilde{M} = f^{-1}F_{p+d}M \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \omega_{X/Y} (p \in \mathbb{Z}) \text{ et } d = \dim X -$$

$\dim Y$, où $(M, F)(d) = (M(d), F[d])$ et $M(d) = M \otimes \mathcal{Z}(d)$.

3.5.2. Lemme. *Si f est lisse, (M, F) est non-caractéristique pour f .*

(C'est clair, car $\mathcal{O}_X$ est plat sur $\mathcal{O}_Y$ et $df^*: X \times_Y T^*Y \rightarrow T^*Y$ est injectif.)

3.5.3. Lemme. *Si f est non-caractéristique pour (M, F) , $f^*(M, F)[d]$ est un $\mathcal{D}_X$ -Module filtré cohérent tel que*

$$\text{Car}(f^*M[d]) = df^*(pr_2^{-1} \text{Car}(M)).$$

Preuve. On a par définition

$$pr_2^{-1} \text{Car}(M) = \text{supp}(f^{-1} Gr^F M \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)^\sim \subset X \times_Y T^*Y \quad (= \text{Specan } Gr \mathcal{D}_{X \rightarrow Y})$$

et

$$\text{Car}(f^*M[d]) = \text{supp}(f^{-1} Gr^F M \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)^\sim \subset T^*X \quad (= \text{Specan } Gr \mathcal{D}_X)$$

où $f^{-1} Gr^F M \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ est muni d'une structure de $Gr \mathcal{D}_X$ -Module par le morphisme d'anneaux $df_*: Gr \mathcal{D}_X \rightarrow Gr \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$ et est cohérent sur $Gr \mathcal{D}_X$ par la condition (3.5.1.2); alors l'assertion est claire, car $df^* = \text{Specan}(df_*)$.

3.5.4. Lemme. *Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ des morphismes de variétés complexes lisses, soit (M, F) un $\mathcal{D}_Z$ -Module filtré cohérent, alors:*

- (1) *Si (M, F) et $g^*(M, F)[\dim Y - \dim Z]$ sont non-caractéristique respectivement pour g et f , (M, F) l'est pour gf ; on a la réciproque (au voisinage de X) si f, g sont des immersions fermées.*
- (2) *Supposons que g soit lisse, alors gf est non-caractéristique pour (M, F) si et seulement si f l'est pour $g^*(M, F)[\dim Y - \dim Z]$.*

Preuve. La première assertion est claire; la réciproque résulte de la théorie de suites régulières car $N \otimes_{\mathcal{O}_Z}^L \mathcal{O}_X \simeq K(N; z_1, \dots, z_n)[n]$. Si g est lisse, $id \times dg^*: X \times_Z T^*Z \rightarrow X \times_Y T^*Y$ est une immersion fermée et $\mathcal{O}_Y$ est plat sur $\mathcal{O}_Z$; alors l'assertion résulte des diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} T^*X \leftarrow X \times_Y T^*Y \leftarrow X \times_Z T^*Z & (N \otimes_A B) \otimes_B C = N \otimes_A C & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ T^*Y \leftarrow Y \times_Z T^*Z & (N \otimes_A B) \otimes_A^L C \simeq N \otimes_A^L C & \\ & \downarrow & \\ & T^*Z & \end{array}$$

où $A = \mathcal{O}_Z$, $B = \mathcal{O}_Y$ et $C = \mathcal{O}_X$.

3.5.5. Lemme. Soit $(M, F) \in MF_h(\mathcal{D}_Y)$, i.e. M est holonome. Si f est non-caractéristique pour (M, F) , on a $f^*(M, F)[d] \in MF_h(\mathcal{D}_X)$.

Preuve. Si f est lisse, on a $Gr f^*(M, F)[d] \simeq f^{-1} Gr M \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \omega_{X/Y}$; donc $\dim \text{Car}(f^*(M, F)[d]) = \dim X$. Si f est une immersion fermée telle que $\dim X = \dim Y - 1$, on a (localement)

$$\dim \text{Car} f^*(M, F)[d] < \dim X \quad \text{si} \quad \text{Car}(M) \not\subset X \times_{\mathbb{A}^1} T^*Y$$

et

$$\text{Car}(M) = (df^*)^{-1} df^* \text{Car}(M) \quad \text{sinon,}$$

car $\text{Car}(M)$ est Lagrangienne; d'où l'assertion. Le cas général résulte de 3.5.4.

3.5.6. Lemme. Soit $i: X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée de variétés complexes lisses telles que $\dim X = \dim Y - 1$. Soit (M, F) un $\mathcal{D}_Y$ -Module filtré cohérent. Si X est non-caractéristique pour (M, F) , alors (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de X , de plus la filtration V est définie par

$$(3.5.6.1) \quad V_\alpha M = \begin{cases} M \mathcal{I}_X^i & \text{si } -i-1 \leq \alpha < -i, i \geq 0, \\ M & \text{si } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{I}_X$ est l'Idéal de X ; en particulier on a un isomorphisme canonique

$$Gr_{-1}^V(M, F) \otimes \omega_{X/Y} \simeq i^!(M, F)[1]$$

et $Gr_\alpha^V(M, F) = 0$ pour $\alpha \neq -1, -2, \dots$.

Preuve. On définit la filtration V par (3.5.6.1). Puisque $t: Gr^F M \rightarrow Gr^F M$ est injectif par la condition (3.5.1.1), on a l'injectivité de $t^i: M/F_p M \rightarrow M/F_p M$ et de $t^i: M/F_p M \rightarrow V_{-i-1} M/F_p V_{-i-1} M$, alors on vérifie que $t^i: F_p M \rightarrow F_p V_{-i-1} M$ est bijectif par le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow F_p M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/F_p M & \longrightarrow & 0 \\ t^i \downarrow & & t^i \downarrow & & t^i \downarrow & & \\ 0 \rightarrow F_p V_{-i-1} M & \rightarrow & V_{-i-1} M & \rightarrow & V_{-i-1} M/F_p V_{-i-1} M & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Il reste à démontrer que $Gr^F M$ sont cohérents sur $Gr^F V_0 \mathcal{D}_Y$. Posons

$$T^*(Y/\mathcal{C}) = \text{Coker}(dt^*: Y \times_{\mathcal{C}} T^* \mathcal{C} \hookrightarrow T^* Y)$$

$$\phi: T^* Y \rightarrow T^*(Y/\mathcal{C}) \quad \text{la projection naturelle,}$$

alors $\text{Car}(M)$ est finie sur $T^*(Y/\mathcal{C})$ au voisinage de $X \times_{\mathbb{A}^1} T^*(Y/\mathcal{C}) = T^* X$ par la condition (3.5.1.2), donc $Gr^F M$ est cohérent sur $Gr^F \mathcal{D}_{Y/\mathcal{C}}$ et sur $Gr^F V_0 \mathcal{D}_Y$.

3.5.7. Lemme. Soient X, Y et (M, F) comme dans 3.5.6 (en particulier X est non-caractéristique pour (M, F)), soit $M(*X)$ la localisation de M par t , on a alors une filtration F sur $M(*X)$ telle que $(M(*X), F)$ soit un $\mathcal{D}_Y$ -Module filtré cohérent et qu'on ait une suite exacte filtrée

$$(3.5.7.1) \quad 0 \rightarrow (M, F) \rightarrow (M(*X), F) \rightarrow i_* i^!(M, F)[1] \rightarrow 0;$$

de plus $(M(*X), F)$ est quasi-unipotent et régulier le long de X et la filtration V est définie par

$$(3.5.7.2) \quad V_\alpha M(*X) = Mt^i \text{ pour } -i-1 \leq \alpha < -i.$$

Preuve. Soit $\tilde{M} = M(*X)$. On définit la filtration F par

$$F_p(Mt^{-1}) = (F_p M)t^{-1}, \\ F_p(\tilde{M}) = \sum_{i \geq 0} (F_{p-i}(Mt^{-1}))\partial_t^i$$

et V par (3.5.7.2). D'abord on vérifie que $t: Gr_i^V \tilde{M} \rightarrow Gr_{i-1}^V \tilde{M}$ sont bijectifs et que l'action de $t\partial_t - i$ sur $Gr_i^V \tilde{M}$ est nulle. Par le même argument que dans la preuve de 3.2.2, on vérifie que $\partial_t: Gr_\alpha^V F_p \tilde{M} \rightarrow Gr_{\alpha+1}^V F_{p+1} \tilde{M}$ sont bijectifs pour $\alpha \geq 0$; en particulier on a un isomorphisme canonique

$$(M(*X)/M, F) \simeq i_* i^!(M, F)[1]$$

car $(Gr_0^V M, F) \simeq i^!(M, F)[1]$ par définition; donc on a (3.5.7.1). Les autres assertions sont claires.

3.5.8. Lemme. Soient X, Y et (M, F) comme dans 3.5.7. On définit un $\mathcal{D}_Y$ -Module par $M(!X) := M \oplus i_* i^* M[-1]$ avec

$$(m, n)P = (mP, nP) \text{ pour } P \in V_0 \mathcal{D}_Y$$

et

$$(m, n)\partial_t = (m\partial_t, [m] \otimes [\partial_t] + n\partial_t)$$

ou $[m] \otimes [\partial_t] \in M/Mt \otimes \omega_{X/Y} \subset i_* i^* M[-1]$, et la filtration F par

$$F_p(M(!X)) = F_p M \oplus F_p(i_* i^* M[-1]),$$

de sorte qu'on ait une suite exacte filtrée:

$$(3.5.8.1) \quad 0 \rightarrow i_* i^*(M, F)[-1] \rightarrow (M(!X), F) \rightarrow (M, F) \rightarrow 0;$$

alors $(M(!X), F)$ est quasi-unipotent et régulier le long de X et la filtration V est définie par

$$V_\alpha(M(!X)) = V_\alpha M \oplus V_\alpha(i_* i^* M[-1]).$$

Preuve. Puisque $\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}_{Y/C} \otimes \mathcal{C}[\partial_t]$ (localement) et $(mt, nt)\partial_t = (mt\partial_t, nt\partial_t)$, on vérifie que la structure de $\mathcal{D}_Y$ -Module est bien définie et indépendante du choix de ∂_t , alors les autres assertions sont claires.

3.5.9. Lemme. Soient X, Y et (M, F) comme dans 3.5.7, soit $j: Y \setminus X \hookrightarrow Y$ l'inclusion naturelle. Supposons que (M, F) soit holonome, on a alors les isomorphismes

$$\begin{aligned} DR(M(*X)) &\simeq \mathbf{R}j_*j^*DRM, & DRi^!M &\simeq i^!DRM, \\ DR(M(!X)) &\simeq j_!j^!DRM, & DRi^*M &\simeq i^*DRM, \end{aligned}$$

de sorte que les triangles

$$\begin{aligned} \rightarrow DRM \rightarrow DRM(*X) &\rightarrow DRi_*i^!M[1] \xrightarrow{+1} \\ \rightarrow DRi_*i^*M[-1] &\rightarrow DRM(!X) \rightarrow DRM \xrightarrow{+1} \end{aligned}$$

induits par (3.5.7.1) et (3.5.8.1) sont identifiés avec les triangles

$$\begin{aligned} \rightarrow i_!i^!DRM &\rightarrow DRM \rightarrow \mathbf{R}j_*j^*DRM \xrightarrow{+1} \\ \rightarrow j_!j^!DRM &\rightarrow DRM \rightarrow i_*i^*DRM \xrightarrow{+1} \end{aligned}$$

au décalage près.

Preuve. Soit $M \rightarrow I^*$ une résolution injective, posons

$$\mathbf{R}j_*j^*DRM^* = j_*j^*DRI^*$$

où DR signifie le foncteur $\otimes_{\mathcal{O}_Y} \wedge^{-\bullet} \Theta_Y$; on a alors le morphisme canonique

$$(3.5.9.1) \quad DRM(*X) \rightarrow \mathbf{R}j_*j^*DRM$$

défini par

$$DRM(*X) \rightarrow DRI^*(*X) \rightarrow DRj_*j^*I^* = j_*j^*DRI^*,$$

de plus le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & DRM & \\ \swarrow & & \searrow \\ DRM(*X) & \longrightarrow & \mathbf{R}j_*j^*DRM \end{array}$$

commute dans la catégorie des $\mathcal{C}$ -complexes; donc il suffit de vérifier que (3.5.9.1) est un quasi-isomorphismes. Puisque l'assertion est locale, on peut supposer que $Y = X \times S$ et que t est une coordonnée de $S \subset \mathcal{C}$, on a alors

$$DR_Y M(*X) = DR_S(DR_{Y/S} M(*X)) \simeq DR_S(DR_{Y/S} I^*(*X)).$$

Posons $L^* = DR_{Y/S} I^*$, alors il suffit de vérifier que

$$DR_S(L(*X)) \rightarrow DR_S(\mathbf{R}j_* j^* L^*)$$

est un quasi-isomorphisme. Par le même argument que la preuve de 3.4.5 (i.e. en utilisant la fibration de Milnor), on peut supposer que $Y=S$ et que $\mathcal{H}^i L^*$ sont des $\mathcal{D}_S$ -Modules holonomes réguliers, car (M, F) est holonome et quasi-unipotent et régulier le long de X , cf. la preuve de 3.4.9. En utilisant la filtration canonique, on peut supposer que L est un Module, alors l'assertion est bien connue.

Maintenant démontrons les assertions pour $DRM(!X)$. Puisque $j^!$ est un foncteur adjoint à droite de $j_!$, on a le morphisme canonique

$$(3.5.9.2) \quad j_! j^! DRM \rightarrow DRM(!X)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} j_! j^! DRM & \longrightarrow & DRM(!X) \\ & \searrow & \swarrow \\ & DRM & \end{array}$$

commute dans la catégorie des $\mathcal{C}$ -complexes, donc il suffit de vérifier que (3.5.9.2) est un quasi-isomorphisme, i.e. $i^* DRM(!X) = 0$. Posons $L = DR_{Y/S} M(!X)$ comme ci-dessus. Puisque $M(!X)$ est holonome et quasi-unipotent et régulier le long de X , $H^i L_x$ sont des $\mathcal{D}_{S,0}$ -modules holonomes réguliers pour $i \in \mathbb{Z}$, $x \in X$. Puisque

$$\partial_i: Gr_{-1}^V M(!X) \rightarrow Gr_0^V M(!X)$$

est bijectif, on obtient que

$$\partial_i: Gr_{-1}^V H^i L_x \rightarrow Gr_0^V H^i L_x$$

sont bijectifs, donc $DRM(!X)_x = DR_S L_x^*$ est acyclique pour $x \in X$. Ce qui achève la démonstration de 3.5.9.

3.5.10. Définition. Soient X, Y, i et (M, F) comme dans 3.5.7, alors le morphisme de Gysin (resp. de restriction)

$$i_*: i_* i^!(M, F) \rightarrow (M, F) \quad (\text{resp. } i^*: (M, F) \rightarrow i_* i^*(M, F))$$

est un morphisme dans $DF(\mathcal{D}_Y)$ défini par le triangle (3.5.7.1) (resp. (3.5.8.1)).

3.5.11. Soit $Y = Y_1 \cup Y_2$ un diviseur à croisements normaux sur X tel que Y_1 et Y_2 soient lisses et que Y_1, Y_2 et $Z = Y_1 \cap Y_2$ soient non-caractéristiques pour un $\mathcal{D}_X$ -Module filtré cohérent (M, F) . Soit $f = xy$ où x (resp. y) est un généra-

teur de l'Idéal de Y_1 (resp. Y_2). Posons $(\tilde{M}, F) = i_{f*}(M, F)$, on a par définition:

$$(3.5.11.1) \quad \begin{aligned} \tilde{M} &= M \otimes \mathcal{C}[\partial_i], \quad F_p \tilde{M} = \bigoplus F_{p-j} M \otimes \partial_i^j \\ (u \otimes \partial_i^j) \xi &= u \xi \otimes \partial_i^j - u(\xi f) \otimes \partial_i^{j+1}, \quad (u \otimes \partial_i^j) a = u a \otimes \partial_i^j, \\ (u \otimes \partial_i^j) t &= u f \otimes \partial_i^j + j u \otimes \partial_i^{j-1}, \quad (u \otimes \partial_i^j) \partial_i = u \otimes \partial_i^{j+1}, \\ &\text{pour } u \in M, \xi \in \Theta_X, a \in \mathcal{O}_X. \end{aligned}$$

Soit $s = t \partial_i$, on définit les filtrations V , $\mathbb{V}$ et G par

$$(3.5.11.2) \quad V_\alpha \tilde{M} = \begin{cases} (M f^i \otimes 1) \mathcal{D}_X, & -i-1 \leq \alpha < -i, \quad i \geq 0 \\ \sum_{0 \leq l \leq \alpha+1} (V_{-i} \tilde{M}) \partial_i^l, & \alpha \geq 0. \end{cases}$$

$$(3.5.11.3) \quad \mathbb{V}_{-i-1, k} \tilde{M} = \begin{cases} V_{-i-2} \tilde{M}, & i \geq 0, \quad k \leq -2 \\ V_{-i-1} \tilde{M}(s+i+1) + V_{-i-2} \tilde{M}, & i \geq 0, \quad k = -1 \\ (M f^i(x, y) \otimes 1) \mathcal{D}_X, & i \geq 0, \quad k = 0 \\ V_{-i-1} \tilde{M}, & i \geq 0, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

$$(3.5.11.4) \quad G_q \tilde{M} = \sum_{j \leq q} \otimes \partial_i^j.$$

Soient ∂_x, ∂_y des champs de vecteur (loc. définis) sur X tel que

$$[\partial_x, x] = [\partial_y, y] = 1, \quad [\partial_x, y] = [\partial_y, x] = 0.$$

Puisque $(u \otimes 1)x \partial_x = u x \partial_x \otimes 1 - (u \otimes 1)s$, on vérifie que $V_\alpha \tilde{M}$ et $\mathbb{V}_{-i-1, k} \tilde{M}$ sont des $V_0 \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}}$ -sous-Modules de $\tilde{M}$; de plus ce sont des $V_0 \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}}$ -Modules cohérents, car M est de type fini sur $\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}^2}$ (resp. $\mathcal{D}_{X/\mathbf{C}}$) au voisinage de Z (resp. $Y \setminus Z$) par la condition non-caractéristique. On a $\mathbb{V}_{i, k} \subset \mathbb{V}_{i, k+1}$ car

$$(3.5.11.5) \quad (u f^i \otimes 1)(s+i+1) = (u \partial_y f^i y \otimes 1) - (u f^i y \otimes 1) \partial_y$$

(de même pour ∂_x).

Soient $i: Z \hookrightarrow X$, $i_p: Y_p \hookrightarrow X$ ($p=1, 2$) les inclusions naturelles, on définit des morphismes $\mathcal{D}_X$ -linéaires filtrés

$$\begin{aligned} \alpha_{i, -1}: i_* i^1(M, F[1])[2] &\rightarrow (Gr_{i, -1}^Y \tilde{M}, F) \\ \alpha_{i, 0}: \bigoplus_p i_{p*} i_p^1(M, F)[1] &\rightarrow (Gr_{i, 0}^Y \tilde{M}, F) \\ \alpha_{i, 1}: i_* i^1(M, F)[2] &\rightarrow (Gr_{i, 1}^Y \tilde{M}, F) \end{aligned}$$

pour $i < 0$ par

$$\begin{aligned} \alpha_{i, -1}(u) &= (u f^{-i} \otimes 1)(s-i) \\ \alpha_{i, 0}(u_1, u_2) &= (u_1 f^{-i} + u_2 f^{-i}) \otimes 1, \\ \alpha_{i, 1}(u) &= u f^{-i} \otimes 1, \end{aligned}$$

où $u \in i^!M[2] = Mf^{-1}/Mx^{-1} + My^{-1}$, $u_1 \in i_1^!M[1] = Mx^{-1}/M$ et $u_2 \in i_2^!M[1] = My^{-1}/M$. Notons que $\alpha_{i,k}$ sont uniquement déterminés par leur restriction sur $i^!(M, F[1])[2]$ etc. On vérifie que $\alpha_{i,k}$ sont bien-définis (e.g. $\alpha_{i,-1}(Mx^{-1}) \subset V_{i,-2}\tilde{M}$ et $\alpha_{i,0}$ est $\mathcal{D}_X$ -linéaire) par la formule (3.5.11.5).

Sur $X \setminus Z$ il existe (localement) un champ de vecteur ∂_f tel que $[\partial_f, f] = 1$ au voisinage de Y . Puisque

$$(u \otimes 1)\partial_f = u\partial_f \otimes 1 - u \otimes \partial_t$$

on vérifie que

$$V_\omega \tilde{M} = \begin{cases} \tilde{M}t^i & -i-1 \leq \alpha < -i, \quad i \geq 0 \\ \tilde{M} & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$V_{i,k} \tilde{M} = \begin{cases} V_{i-1} \tilde{M} & k < 0 \\ V_i \tilde{M} & k \geq 0, \end{cases}$$

donc on va considérer seulement au voisinage de Z où ∂_x, ∂_y existent (localement), et tel que $Gr^F M$ soit plat sur $C_{x,y}^2$ et de type fini sur $Gr^F \mathcal{D}_{X/C^2}$.

3.5.12. Lemme.

$$G_q V_{-i-1,k} \tilde{M} = \begin{cases} (Mf^{i+1} \otimes 1)F_q \mathcal{D}_X, & k \leq -2 \\ (Mf^i \otimes 1)(s+i+1)F_{q-1} \mathcal{D}_X + Mf^{i+1} \otimes 1, & k = -1 \\ (Mf^i(x, y) \otimes 1)F_q \mathcal{D}_X, & k = 0 \\ (Mf^i \otimes 1)F_q \mathcal{D}_X, & k \geq 1. \end{cases}$$

Preuve. Puisque $\{x, y\}$ est une suite régulière de $Gr^F M$ et de M , on a :

$$(3.5.12.1) \quad \text{Soit } P(S, T) = \sum u_i S^i T^{q-i} \in M[S, T] \text{ tel que } P(x, y) = 0, \text{ alors il existe } Q(S, T) = \sum u'_i S^i T^{q-1-i} \text{ tel que } P(S, T) = Q(S, T)(yS - xT), \text{ i.e. } u_i = u'_{i-1}y - u'_i x.$$

D'abord on va démontrer

$$G_{q-1} \tilde{M} \cap (Mf^i \otimes 1)F_q \mathcal{D}_X = (Mf^i \otimes 1)F_{q-1} \mathcal{D}_X \quad (i \geq 0),$$

ce qui entraîne l'assertion pour $k \leq -2$ et $k \geq 1$. Puisque

$$(Mf^i \otimes 1)F_q \mathcal{D}_X = \sum_{i+j \leq q} (Mf^i \otimes 1)\partial_x^i \partial_y^j$$

il suffit de vérifier :

$$(3.5.12.2) \quad \text{Si } u = \sum (u_j \otimes 1)\partial_x^j \partial_y^{q-j} \in G_{q-1} \tilde{M} \text{ avec } u_j \in Mf^i, \\ \text{on a } u = (v_j \otimes 1)\partial_x^j \partial_y^{q-1-j} \text{ avec } v_j \in Mf^i.$$

D'après (3.5.11.1), on a $\sum u_j y^j x^{q-j} = 0$, donc (3.5.12.1) entraîne que $u_j =$

$u'_{j-1}x - u'_jy$ avec $u'_j \in Mf^i$, on a alors

$$\begin{aligned} u &= \sum ((u'_{j-1}x - u'_jy) \otimes 1) \partial_x^j \partial_y^{q-j} \\ &= \sum ((u'_jx \partial_x - u'_jy \partial_y) \otimes 1) \partial_x^j \partial_y^{q-1-j} \end{aligned}$$

d'où l'assertion (3.5.12.2).

D'après (3.5.11.5) on vérifie que $Mf^{i+1} \otimes 1 + V_{-i-1} \tilde{M}(s+i+1)$ est un $\mathcal{D}_X$ -Module, donc

$$V_{-i-1, -1} \tilde{M} = Mf^{i+1} \otimes 1 + V_{-i-1} \tilde{M}(s+i+1).$$

Par la même démonstration, on a l'assertion pour $k=-1$, car

$$s+i+1: Gr_{q-1}^G \tilde{M} \rightarrow Gr_q^G \tilde{M}$$

est injectif. Démontrons le cas $k=0$. Supposons que

$$u = \sum ((u'_jx + u''_jy) \otimes 1) \partial_x^j \partial_y^{q-j} \in G_{q-1} \tilde{M} \quad \text{avec} \quad u'_j, u''_j \in Mf^i,$$

i.e. $\sum (u'_jy^jx^{q-j+1} + u''_jy^{j+1}x^{q-j}) = 0$. D'après (3.5.12.1), on a

$$u'_j + u''_{j-1} = v_{j-1}x - v_jy \quad \text{avec} \quad v_j \in Mf^i$$

donc

$$\begin{aligned} u &= \sum ((-u''_{j-1}x + v_{j-1}x^2 - v_jxy + u''_jy) \otimes 1) \partial_x^j \partial_y^{q-j} \\ &= \sum ((-u''_jx \partial_x + u''_jy \partial_y) + (v_jx)x \partial_x - (v_jy)y \partial_y) \otimes 1 \partial_x^j \partial_y^{q-1-j} \end{aligned}$$

d'où l'assertion, car $vf^i x \partial_x - vf^i y \partial_y = (v \partial_x) f^i x - (v \partial_y) f^i y$ pour $v \in M$.

3.5.13. Corollaire. $Gr_q^G V_{-i-1, k} \tilde{M} = M \otimes_A \alpha(-i-1, k, q)$, où $A = C[x, y]$ et

$$\alpha(-i-1, k, q) = \begin{cases} Af^{i+1}(x, y)^q & k \leq -2 \\ Af^{i+1}(x, y)^{q-1} & k = -1 \\ Af^i(x, y)^{q+1} & k = 0 \\ Af^i(x, y)^q & k \geq 1. \end{cases}$$

(C'est clair car M est plat sur A .)

3.5.14. Lemme. Les morphismes canoniques

$$(F_{p-q}M)\alpha(-i-1, k, q) \otimes \partial_i^q \hookrightarrow Gr_q^G F_p V_{-i-1, k} \tilde{M} \hookrightarrow F_p V_{-i-1, k} Gr_q^G \tilde{M}$$

sont des isomorphismes ($i \geq 0$); en particulier (F, G, V) sont compatibles, cf. 1.2.14, et $(F_p V_{-i-1, k} \tilde{M})t = F_p V_{-i-2, k} \tilde{M}$.

Preuve. Puisque $(F_{p-q}Mf^i \otimes 1)F_q \mathcal{D}_X \subset G_q F_p V_{-i-1} \tilde{M}$, etc., on vérifie que $(F_{p-q}M)\alpha(-i-1, k, q) \otimes \partial_i^q$ est un sous-Module de $Gr_q^G F_p V_{-i-1, k} \tilde{M}$, donc il

suffit de démontrer que

$$(F_{p-q}M)\alpha(-i-1, k, q) \otimes \partial_i^q = F_p V_{-i-1, k} Gr_q^G \tilde{M} ;$$

or on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & F_{p-q}M \otimes_A \alpha & \rightarrow & M \otimes_A \alpha & \rightarrow & (M/F_{p-q}M) \otimes_A \alpha \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_{p-q}M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/F_{p-q}M \rightarrow 0 \end{array}$$

d'où l'assertion.

3.5.15. Corollaire. $\alpha_{-i-1, k}$ sont des isomorphismes filtrés.

Preuve. On définit la filtration G par

$$\begin{aligned} G_q(i_* i^! M[2]) &= \bigoplus_{i+j \leq q} (Mf^{-1}/Mx^{-1} + My^{-1}) \partial_x^i \partial_y^j \\ G_q(i_1 * i_1^! M[1]) &= \bigoplus_{j \leq q} (Mx^{-1}/M) \partial_z^j \quad (\text{de même pour } i_2 * i_2^! M[1]), \end{aligned}$$

alors les morphismes $\alpha_{-i-1, k}$ préservent les filtrations G (au décalage près si $k = -1$), donc il suffit de démontrer que $Gr_q^G F_p \alpha_{-i-1, k}$ sont des isomorphismes. D'après 3.5.14 on peut supposer que $i=0$, et on a

$$F_p Gr_q^G Gr_{-1, k}^V \tilde{M} = F_{p-q} M \otimes_A (\alpha(-1, k, q)/\alpha(-i, k-1, q)),$$

avec

$$\alpha(-1, k, q)/\alpha(-1, k-1, q) = \begin{cases} \bigoplus_{j+k=q-1} \mathbf{C} x^{j+1} y^{k+1} & k=-1 \\ Ay^{q+1}/Axy^{q+1} \oplus Ax^{q+1}/Ayx^{q+1} & k=0 \\ \bigoplus_{j+k=q} \mathbf{C} x^j y^k & k=1. \end{cases}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} F_p Gr_q^G(i_* i^! M[2]) &= \bigoplus_{j+k=q} (F_{p-q} Mf^{-1}/F_{p-q} Mx^{-1} + F_{p-q} My^{-1}) \partial_x^j \partial_y^k \\ F_p Gr_q^G(i_1 * i_1^! M[1]) &= (F_{p-q} Mx^{-1}/F_{p-q} M) \partial_x^q \end{aligned}$$

et $Gr_q^G \alpha_{-1, k}$ est défini par la substitution $\partial_x \rightarrow y$, $\partial_y \rightarrow x$ et par la multiplication de f (ou f^2 si $k=-1$); d'où l'assertion.

3.5.16. Lemme. Soit $i \geq 0$, on a alors

$$V_{i-1} \tilde{M} = \bigoplus_{0 \leq j < i} M \otimes \partial_i^j \oplus V_{-1} \tilde{M} \partial_i^i, \quad Gr_q^G V_{i-1} \tilde{M} = M(x, y)^{q-i} \otimes \partial_i^q,$$

et

$$F_{p-q} M(x, y)^{q-i} \otimes \partial_i^q = F_p V_{i-1} Gr_q^G \tilde{M} = Gr_q^G F_p V_{i-1} \tilde{M} ;$$

en particulier (F, V, G) sont compatibles.

Preuve. La première assertion résulte de

$$(M \otimes 1) \partial_x \subset (M \otimes 1) \oplus (M \otimes \partial_t), \text{ etc.}$$

On a la deuxième assertion d'après 3.5.12, et les autres assertions par le même argument que la preuve de 3.5.14.

3.5.17. Corollaire. $\partial_i^*: (Gr_{-i,1}^V \tilde{M}, F) \xrightarrow{\sim} (Gr_{i-1}^V \tilde{M}, F[-i])$ ($i > 0$).

Preuve. On a d'abord $(V_{-i,0} \tilde{M}) \partial_t \subset V_{-1} \tilde{M}$, i.e. $(M \otimes 1) \partial_t \subset V_{-1} \tilde{M}$, car $ux \otimes \partial_t = -(u \otimes 1) \partial_y + (u \partial_y \otimes 1)$; alors l'assertion résulte de

$$\begin{aligned} Gr_q^G F_p Gr_{-1,1}^V \tilde{M} &= (F_{p-q} M \otimes (x, y)^q / (x, y)^{q+1}) \otimes \partial_t^q \\ Gr_{q+i}^G F_{k+i} Gr_{i-1}^V \tilde{M} &= (F_{p-q} M \otimes (x, y)^q / (x, y)^{q+1}) \otimes \partial_t^{q+i}. \end{aligned}$$

3.5.18. Proposition. Soient (M, F) et f comme dans 3.5.11, alors (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de f , la filtration V est définie par (3.5.11.2), la filtration V induit la filtration de monodromie W sur $Gr_{-i-1}^V \tilde{M}$ pour $i \geq 0$, l'action de $s - \alpha$ est nulle sur $Gr_{\alpha}^V \tilde{M}$ si $\alpha \geq 0$, et (3.2.1.3) est valable pour $\alpha = -1$.

Preuve. D'abord on vérifie que $(V_{-i-1,k} \tilde{M})(s+i+1) \subset V_{-i-1,k-2} \tilde{M}$; par exemple, le cas $k=0$ résulte de (3.5.11.5). On a alors

$$V_{\alpha} \tilde{M}(s-\alpha) \subset V_{\alpha} \tilde{M}, \text{ donc } V_{\alpha} \tilde{M} t \subset V_{\alpha-1} \tilde{M} \text{ et } V_{\alpha} \tilde{M} \partial_t \subset V_{\alpha+1} \tilde{M}$$

pour tout α . D'après 3.5.15 on a

$$s+i+1: (Gr_{-i-1,1}^V \tilde{M}, F) \xrightarrow{\sim} (Gr_{-i-1,-1}^V \tilde{M}, F[-1])$$

et l'action de $s-i+1$ est nulle sur $Gr_{i-1}^V \tilde{M}$ pour $i > 0$ d'après 3.5.17, alors (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de f d'après 3.5.14, 3.5.15 et 3.5.17.

3.6. Le cas croisements normaux

3.6.1. Soient X une variété complexe lisse, D un diviseur à croisements normaux sur X avec g un générateur global de l'Idéal de D . Soient $D^{(i)} = \{x \in X: \text{mult}_x D \geq i\}$, $\tilde{D}^{(i)}$ la normalisation de $D^{(i)}$, $a_i: \tilde{D}^{(i)} \rightarrow X$ le morphisme naturel. Posons $f = g^m$ pour $m > 0$. Soit (M, F) un $\mathcal{D}_X$ -Module holonome filtré tel que chaque $Gr_{\mathbf{f}}^F M$ soit localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_X$. On définit une autre filtration G par $G_0 M = M$, $G_{-1} M = 0$. Posons

$$(\tilde{M}; F, G) = i_{f*}(M; F, G).$$

On définit la filtration V par

$$(3.6.1.1) \quad V_{\alpha} \tilde{M} = \begin{cases} (Mg^i \otimes 1) \mathcal{D}_X, & -(i+1)/m \leq \alpha < -i/m, i \geq 0 \\ \bigoplus_{0 \leq j < k} (M \otimes \partial_j^i) + (V_{\alpha-k} \tilde{M}) \partial_j^k, & k-1 \leq \alpha < k, k \geq 1. \end{cases}$$

alors $V_{\alpha} \tilde{M}$ sont des $V_0 \mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -sous-Modules et V est une filtration croissante, car

$$(3.6.1.2) \quad (u \otimes 1) \partial_j = (u \partial_j \otimes 1) - umg^{m-1}(\partial_j g) \otimes \partial_j$$

$$(3.6.1.3) \quad (ug^i \otimes 1)(ms+i+1) = (u \partial_j x_j g^i \otimes 1) - (ug^i \otimes 1)x_j \partial_j$$

où $s=t\partial_j$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, et $(x_1, \dots, x_n)$ sont des coordonnées locales de X ; de plus $V_{\alpha} \tilde{M}$ sont cohérents car ils sont de type fini sur $V_0 \mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$.

Soient $M\langle D \rangle = Mg^{-1}$, W la filtration canonique de $M\langle D \rangle$, i.e. localement

$$W_r M\langle D \rangle = (W_r \mathcal{Q}_X^n(\log D))^{\text{rang } M} = \sum_{|I| \leq r, I \subset \{1, \dots, l\}} M/x^I$$

si $g=x_1, \dots, x_l$ et $n=\dim X$, cf. [6]. On définit la filtration V par

$$(3.6.1.4) \quad V_{-i/m, k} \tilde{M} = \sum_{r \leq \max(2j+k+1, j)} (W_r M\langle D \rangle g^i \otimes 1)(ms+i)^j \mathcal{D}_X$$

pour $i > 0$, alors ils sont des $V_0 \mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -Modules cohérents et $V_{-i/m, k} \tilde{M} = V_{-i/m} \tilde{M}$ pour $k \geq l-1$, $V_{-(i+1)/m} \tilde{M}$ pour $k \leq -l$.

Soit ε^k le faisceau d'orientation rel. à D sur $\tilde{D}^{(k)}$, i.e. localement $\varepsilon^k = \mathcal{C}D_1 \wedge \dots \wedge D_k$ sur $\bigcap_{1 \leq i \leq k} D_i$ si D_i sont des composants locaux de D , (voir [6.(3.1.1)]).

On définit les morphismes

$$(3.6.1.5) \quad \alpha_{i,k}: a_k * a_k^1(M, F)[k] \otimes \varepsilon^k \rightarrow Gr_{-i/m, k-1}^V(\tilde{M}, F)$$

comme suit:

D'abord on définit $\alpha'_{i,k}$ la restriction de $\alpha_{i,k}$ sur $a_k^1(M, F)[k] \otimes \varepsilon^k = a_k^{-1}(M, F) \otimes \omega_{\tilde{D}^{(k)}/X}(\varepsilon^k)$ par la composition

$$a_k^{-1}(M, F) \otimes \omega_{\tilde{D}^{(k)}/X}(\varepsilon^k) \hookrightarrow a_k^{-1} Gr_k^W(M\langle D \rangle g^i, F) \rightarrow a_k^{-1} Gr_{-i/m, k-1}^V(\tilde{M}, F)$$

où le premier morphisme est défini par

$$u \otimes (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)^{-1} \otimes (D_1 \wedge \dots \wedge D_k) \mapsto ug^i/x_1 \dots x_k,$$

Ici, $\text{Im } a_k = \{x_1 = \dots = x_k = 0\}$ et $D_i = \{x_i = 0\}$ localement (rel. à $\tilde{D}^{(k)}$).

On définit $\mathcal{H}^0 a_k^1 M'$ pour un $\mathcal{D}_X$ -Module M' par

$$\mathcal{H}^0 a_k^1 M' = \mathcal{H}om_{a_k^{-1} \mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{\tilde{D}^{(k)}}, a_k^{-1} M') \quad (\cup a_k^{-1} M')$$

alors $\mathcal{H}^0 a_k^1 M'$ est un $\mathcal{D}_{\tilde{D}^{(k)}}$ -Module, donc pour définir $\alpha_{i,k}$ il suffit de vérifier que $\text{Im } \alpha'_{i,k} \subset \mathcal{H}^0 a_k^1 Gr_{-i/m, k-1}^V \tilde{M}$ et que $\alpha'_{i,k}$ est $\mathcal{D}_{\tilde{D}^{(k)}}$ -linéaire, car localement (rel. à

$\tilde{D}^{(k)} a_k$ est une immersion fermée et $a_{k*} \mathcal{H}^0 a_k^! = \mathcal{H}_{\text{Im } a_k}^0$ d'après Kashiwara.

Puisque l'assertion est locale, on peut supposer que $\text{Im } a_k = \cap D_i$, $D_i = \{x_i = 0\}$ et $M = \omega_X$; alors $\text{Im } \alpha'_{ik} \subset \mathcal{H}^0 a_k^!$ est claire, et on vérifie que α'_{ik} est $\mathcal{D}$ -linéaire en appliquant (3.6.1.3) à $u = u'/x_1 \cdots x_k x_j$ ($j > k$).

3.6.2. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées locales de X telles que $g = x_1 \cdots x_l$. Posons $0 = \{x_1 = \dots = x_n = 0\}$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,0}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{X,0}$ ($= \mathcal{O}[\partial]$). On définit pour $I \subset \{1, \dots, l\}$

$$\mathcal{O}_I = \mathcal{C}\{x_{I^c}\} \subset \mathcal{O}, \quad \text{où } I^c = \{1, \dots, n\} \setminus I.$$

Soient $\nu \in \mathbb{N}^l$, $I \subset \{1, \dots, l\}$, on définit

$$S_{\nu I} = (x\partial)^\nu (g/x^I) \mathcal{O}_I[\partial_I] \subset \mathcal{D}$$

où $(x\partial)^\nu = (x_1 \partial_1)^{\nu_1} \cdots (x_l \partial_l)^{\nu_l}$. Soit F la filtration de $S_{\nu I}$ induite par celle de $\mathcal{D} = \mathcal{O}[\partial]$.

Soient $j \in \mathbb{N}$, $I \subset \{1, \dots, l\}$, $\mu \in \mathbb{N}^I$, on définit

$$\bar{S}_{I,\mu,j} = (g/x^I) (\partial f)^\mu f^j \mathcal{O}_I \subset \mathcal{O}$$

où $(\partial f)^\mu = \prod (\partial_j f)^{\mu_j}$. Soient $p, q \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, on définit

$$A_p = \{(I, \mu, j): |\mu| + j = p, \mu \in \mathbb{N}^I, I \subset \{1, \dots, l\}, j \in \mathbb{N}\}$$

$$A'_{pk} = \{(I, \mu, j): |I| \leq \max(2j+k+1, j), |\mu| + j = p, \mu \in \mathbb{N}^I,$$

$$I \subset \{1, \dots, l\}, j \in \mathbb{N}\}$$

$$A_{pk} = A_p \cap A'_{pk}$$

$$B_k = \{(I, \nu): |I| \leq \max(2|\nu| + k + 1, |\nu|), I \subset \{1, \dots, l\}, \nu \in \mathbb{N}^l\}$$

$$B_{qk} = \{(I, \nu, j): |I| \leq \max(2(|\nu| + j + q) + k + 1, |\nu| + j + q),$$

$$I \subset \{1, \dots, l\}, \nu \in \mathbb{N}^l, j \in \mathbb{N}\}$$

3.6.3. Lemme. $\bigoplus_{I \subset \{1, \dots, l\}, \nu \in \mathbb{N}^l} (S_{\nu I}, F) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}[\partial'], F)$ où $\partial' = (\partial_1, \dots, \partial_l)$.

Preuve. Il suffit de démontrer que $\bigoplus Gr S_{\nu I} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[\xi']$, où $\xi_i = gr \partial_i$. Soit $a(x, \xi')$
 $= \sum a_{\mu\nu} x^\mu \xi^\nu \in \mathcal{O}[\xi']$, on définit

$$\text{supp } a = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^{n+l}: a_{\mu\nu} \neq 0\}.$$

Soit $I \subset \{1, \dots, l\}$, on définit

$$T_I = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^{n+l}: \mu_i = 0 \text{ si } i \in I, \mu_i > 0, \nu_i = 0 \text{ sinon}\},$$

on a alors $a \in Gr^F S_{\nu I}$ si $\text{supp } a \in (\nu, 0, \nu) + T_I$. Puisque $\mathbb{N}^{n+l} = \coprod_{\nu, I} (\nu, 0, \nu) + T_I$, on obtient l'assertion.

3.6.4. Lemme. $\bigoplus_{B_k} S_{v_I}$ est stable par l'action de $\mathcal{D}$ à droite sur $\mathcal{O}[\partial'] = \mathcal{D} / \sum_{j>I} \partial_j \mathcal{D}$, i.e.

$$\bigoplus_{B_k} S_{v_I} = \sum_{B_k} (x\partial)^v (g/x^I) \mathcal{O}[\partial'] .$$

Preuve. Puisqu'on a

$$(3.6.4.1) \quad \begin{cases} S_{v_I} x_j \subset S_{v_I} \oplus S_{v+1j, I} \oplus S_{v, I \setminus \{j\}} \\ S_{v_I} \partial_j \subset S_{v_I} \oplus S_{v+1j, I} \oplus S_{v+1j, I \cup \{j\}} \end{cases}$$

$\bigoplus S_{v_I}$ sont stables par l'action de $\mathcal{C}[x, \partial']$. On vérifie que $F_p S_{v_I}$ sont des sous-espaces fermés de $F_p \mathcal{O}[\partial']$ par la topologie m -adique. Puisque $F_p \mathcal{O}[\partial']$ est une somme directe finie de $F_p S_{v_I}$ et l'action

$$F_p \mathcal{O}[\partial'] \times F_q \mathcal{D} \rightarrow F_{p+q} \mathcal{O}[\partial']$$

est continue, on obtient l'assertion.

3.6.5. Lemme. Pour $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\bigoplus_{(I, \mu, j) \in A_p} \bar{S}_{I, \mu, j} \rightarrow \mathcal{O}$ est injectif et

$$\bigoplus_{A_{pk}} \bar{S}_{I, \mu, j} = \sum_{A'_{pk}} (g/x^I) (\partial f)^\mu f^j \mathcal{O}, \quad \text{cf. 3.6.2.}$$

Preuve. Posons $\bar{T}_{I, \mu, j} = \{\nu \in \mathbb{N}^n : \nu_i = m(|\mu| + j) - \mu_i \text{ si } i \in I, \nu_i \geq m(|\mu| + j) + 1 \text{ si } i \notin I, i \leq l\}$ on a alors $\bar{T}_{I, \mu, j} = \text{supp } \bar{S}_{I, \mu, j}$ et $\bigcup_{(I, \mu, j) \in A_p} \bar{T}_{I, \mu, j} \subset \mathbb{N}^n$; d'où la première assertion. Soit $\lambda_p: Gr_p^F \mathcal{O}[\partial'] \rightarrow \mathcal{O}$ le morphisme défini par $\lambda_p(\partial_j) = \partial_j f$, alors

$$\bigoplus_{A_{pk}} \bar{S}_{I, \mu, j} = \lambda_p(Gr_p^F(\bigoplus_{B_k} S_{v_I}))$$

on a donc $\bigoplus_{A_{pk}} \bar{S}_{I, \mu, j} \supset \sum_{A'_{pk}} (g/x^I) (\partial f)^\mu f^j \mathcal{O}$ d'après 3.6.4, et l'autre inclusion est claire; d'où l'assertion.

3.6.6. Supposons maintenant que $M = \omega_X$, $F = G$, cf. 3.6.1. Soit $K^* = K(\mathcal{O}[\partial', s]: (x_j \partial_j + (ms + i))^\bullet, 1 \leq j \leq l)$ $[I]$ le complexe de Koszul pour la multiplication à gauche de $(x_j \partial_j + (ms + i))^\bullet$ sur $\mathcal{O}[\partial', s]$. On définit les filtrations F et W par

$$\begin{aligned} F_p K^{-q} &= \bigoplus (F_{p-q} \mathcal{O}[\partial', s]) \\ W_k K^{-q} &= \bigoplus_{B_{qk}} (\bigoplus S_{v_I}(ms + i)^j) . \end{aligned}$$

On définit le scindage W par

$$K_k^{-q} = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{|I|=2(|v|+j+q)+k+1 \\ |I|>|v|+j+q}} (\bigoplus S_{v_I}(ms+i)^j) & k \in \mathbb{Z} \\ \bigoplus_{|I| \leq |v|+j+q} (\bigoplus S_{v_I}(ms+i)^j) & k = -\infty . \end{cases}$$

Soit $\beta_i: K^0 \rightarrow V_{-i/m} \tilde{M}_0 (\subset \omega_x[\partial_t])$ le morphisme $\mathcal{D}[s]$ -linéaire défini par $\beta_i(P) = (dx \otimes 1) g^{i-1} P$, alors β_i préserve la filtration F .

3.6.7. Lemme. *Avec les notations 3.6.6, $(K; F, W)$ est strict, $H^i(K) = 0$ pour $j \neq 0$, et on a :*

$$\beta_i: H^0(K; F, W) \simeq (V_{-i/m} \tilde{M}_0; F, V_{-i/m, *}),$$

et

$$Gr_p^F V_{-i/m, k} \tilde{M}_0 = \sum_{\substack{A'_{pk}}} (g^i/x^i) (\partial f)^\mu f^j \mathcal{O} \otimes \partial_t^\mu.$$

Preuve. Puisque $\{Gr^F(x_j \partial_j + ms + i)\}$ est une suite régulière de $Gr^F \mathcal{O}[\partial', s]$, on a $H^i(Gr^F K) = 0$ pour $i \neq 0$; d'où les premières deux assertions, car le scindage de W est compatible avec la différentielle et la filtration F . D'après (3.6.1.3) et 3.6.4, on vérifie que $\beta_i: H^0(K, F, W) \rightarrow (V_{-i/m} \tilde{M}_0, F, \mathbb{V})$ est bien-défini, et que $\beta_i: H^0(W_k K) = V_{-i/m, k} \tilde{M}_0$; donc il suffit de vérifier que $\beta_i: H^0(K, F) \rightarrow (V_{-i/m} \tilde{M}_0, F)$ est injectif et strict, i.e. $Gr^F \beta_i: H^0(Gr^F K) \rightarrow Gr^F \tilde{M}_0 = \mathcal{O} \otimes \mathcal{C}[gr \partial_t]$ est injectif. Par la définition de (K, F) on a

$$H^0(K, F) \simeq \bigoplus_{j, I} (S_{0, I}(ms + i)^j, F)$$

avec

$$Gr_p^F (S_{0, I}(ms + i)^j) = \bigoplus_{|\mu| = p - j} (g/x^i) \mathcal{O}_I \otimes \partial_t^\mu (ms + i)^j.$$

Puisque $Gr^F \beta_i$ est défini par la substitution $\partial_j \mapsto \partial_j f$ et $ms + i \mapsto mf$, on voit que $Gr^F \beta_i$ est injectif d'après 3.6.5. La dernière assertion résulte de 3.6.5, car

$$W_k Gr_p^F H^0(K) = \bigoplus_{|I| \leq \max(2j + k + 1, j)} Gr_p^F S_{0, I}(ms + i)^j.$$

3.6.8. Corollaire. *Avec les notations 3.6.7, on a la décomposition comme $\mathcal{D}$ -Modules filtrés*

$$Gr_{-i/m, k}^V(\tilde{M}_0, F) = \bigoplus_{\substack{|I| = 2j + k + 1 \\ j \geq 0, j + k \geq 0}} (\mathcal{O}_I[\partial_I] (ms + i)^j, F).$$

Preuve. D'après (3.6.4.1), on vérifie que chaque $S_{0, I}(ms + i)^j$ est stable par l'action de $\mathcal{D}$ sur $Gr_k^W H^0 K$ pour $|I| = 2j + k + 1$, alors l'assertion résulte de 3.6.7, car

$$Gr_k^W H^0(K, F) = \bigoplus_{\substack{|I| = 2j + k + 1 \\ j \geq 0, j + k \geq 0}} (S_{0, I}(ms + i)^j, F).$$

3.6.9. Lemme. *Avec les notations 3.6.1, les morphismes naturels*

$$(3.6.9.1) \quad \sum_{r \leq \max(2j + k + 1, j)} ((W_r M \langle D \rangle g^i \cap F_{p-q} M) \otimes 1) (ms + i)^j F_{q-j} \mathcal{D}_x \\ \rightarrow F_p V_{-i/m, k} Gr_q^G \tilde{M}$$

sont surjectifs, de plus on a les isomorphismes

$$(3.6.9.2) \quad W_r M \langle D \rangle g^i \cap F_p M = \sum_{|I| \leq r} F_p M(g^i/x^I)$$

$$(3.6.9.3) \quad \sum_{A'_{pk}} F_{p-q} M(g^i/x^I) (\partial f)^\mu f^j = Gr_q^G F_p V_{-i/m,k} \tilde{M} = F_p V_{-i/m,k} Gr_q^G \tilde{M}$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ sont des coordonnées locales telles que $g = x_1 \cdots x_i$; en particulier, (F, G, V) sont compatibles.

Preuve. Puisque $F_p M$ et $M/F_p M$ sont plats sur $\mathcal{O}_X$, on a

$$(3.6.9.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & F_p M \otimes \mathfrak{a} & \rightarrow & M \otimes \mathfrak{a} & \rightarrow & M/F_p M \otimes \mathfrak{a} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_p M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/F_p M \longrightarrow 0 \end{array}$$

pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_X$; d'où l'assertion (3.6.9.2) en l'appliquant à $\mathfrak{a} = \sum_{|I| \leq r} \mathcal{O} g^i/x^I$. On vérifie facilement que l'image du morphisme (3.6.9.1) dans $Gr_q^G \tilde{M} = M$ est le premier terme de (3.6.9.3). D'après 3.6.7, on a

$$Gr_q^G V_{-i/m,k} \tilde{M} = \sum_{A'_{pk}} M(g^i/x^I) (\partial f)^\mu f^j,$$

d'où la surjectivité de (3.6.9.1) en appliquant (3.6.9.4) à

$$\mathfrak{a} = \sum_{A'_{pk}} \mathcal{O}(g^i/x^I) (\partial f)^\mu f^j.$$

Puisque le morphisme (3.6.9.1) se factorise par l'inclusion naturelle

$$Gr_q^G F_p V_{-i/m,k} \tilde{M} \hookrightarrow F_p V_{-i/m,k} Gr_q^G \tilde{M},$$

on obtient (3.6.9.3); la dernière assertion résulte de 1.2.14.

3.6.10. Proposition. Avec les notations de 3.6.9, (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de f , avec la filtration V définie par (3.6.1.1), et on a (3.2.1.3) pour $\alpha = -1$. Pour $i > 0$, on a

$$(ms+i)^k: Gr_{-i/m,k}^V(\tilde{M}, F) \xrightarrow{\sim} Gr_{-i/m,-k}^V(\tilde{M}, F[-k])$$

donc la filtration W associée à l'action de $N = s + i/m$ sur $Gr_{-i/m}^V \tilde{M}$ est induite par V (cf. (3.6.1.4)), et on a l'isomorphisme

$$P_N Gr_{k-1}^W Gr_{-i/m}^V(\tilde{M}, F) \xrightarrow{\sim} a_{k*} a_k^!(M, F)[k] \otimes \epsilon^k \quad (k > 0)$$

induit par α_{ik} , cf. (3.6.1.5).

Preuve. Puisque $(V_{-i/m,k} \tilde{M})(ms+i) \subset V_{-i/m,k-2} \tilde{M}$ et $(Gr_{\alpha-k}^V \tilde{M}) \partial_i^k = Gr_{\alpha}^V \tilde{M}$ pour

$-1 \leq \alpha - k < 0$, on vérifie que les conditions de filtration V sont satisfaites, cf.

3.1.1. D'après (3.6.9.3) on a

$$t: Gr_q^G F_p V_{-i/m} \tilde{M} \xrightarrow{\sim} Gr_q^G F_p V_{-i/m-1} \tilde{M} \quad (i > 0)$$

donc $t: F_p V_\alpha \tilde{M} \xrightarrow{\sim} F_p V_{\alpha-1} \tilde{M}$ pour $\alpha < 0$. Puisque la décomposition

$$V_\alpha \tilde{M} = \bigoplus_{0 \leq j < k} (M \otimes \partial_i^j) \oplus (V_{\alpha-k} \tilde{M}) \partial_i^k$$

est compatible avec la filtration F , on voit que

$$\partial_i^k: F_{p-k} Gr_{\alpha-k}^V \tilde{M} \rightarrow F_p Gr_\alpha^V \tilde{M}$$

est surjectif pour $-1 \leq \alpha - k < 0$; d'où la première assertion.

D'après 3.6.8, on a

$$(ms+i)^k: Gr_{-i/m,k}^V \tilde{M} \xrightarrow{\sim} Gr_{-i/m,-k}^V \tilde{M}$$

donc la filtration W est induite par V , et la dernière assertion est démontrée pour $M = \omega_X$, $F = G$. En général on a localement

$$\begin{aligned} F_p Gr_{-i/m,k}^V Gr_q^G \tilde{M} &= F_{p-q} M \otimes (\alpha_{qk} / \alpha_{q,k-1}) \\ &= \bigoplus_{\substack{|I|=2j+k+1 \\ j \geq 0, j+k \geq 0}} F_{p-q} M \otimes Gr_{q-j}^F (\mathcal{O}_I [\partial_I]) \end{aligned}$$

d'après (3.6.9.3) et 3.6.8, où $\alpha_{qk} = \sum_{A'_{qk}} (g^i / x^j) (\partial f)^i f^j$; on a donc

$$(ms+i)^k: Gr_{-i/m,k}^V (\tilde{M}, F, G) \xrightarrow{\sim} Gr_{-i/m,-k}^V (\tilde{M}, F[-k], G[-k])$$

et

$$Gr_q^G F_p (P_N Gr_{-i/m,k}^V \tilde{M}) = \bigoplus_{|I|=k+1} F_{p-q} M \otimes Gr_q^F (\mathcal{O}_I [\partial_I]),$$

i.e. $\alpha_{i,k+1}$ est un isomorphisme filtré, d'où l'assertion.

§4. Structures de Hodge Graduées

4.1. Structures de Hodge graduées polarisées

4.1.1. Soit $M = \bigoplus M^i$ un $\mathcal{C}$ -module gradué muni de l'action de l telle que $lM^i \subset M^{i+2}$. On dit que M est de type L (i.e. de type Lefschetz), si $M^i = 0$ pour $|i| \gg 0$ et

$$l^i: M^{-i} \xrightarrow{\sim} M^i \quad \text{pour tout } i \geq 0.$$

Si M est de type L , on définit la partie primitive par

$$\mathfrak{o}M^{-i} = \text{Ker}(l^{i+1}: M^{-i} \rightarrow M^{i+2}) \quad \text{si } i \geq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon,}$$

on a alors la décomposition de Lefschetz

$$M = \bigoplus_j M_j \quad \text{avec} \quad M_j = \bigoplus_{0 \leq k \leq j} l^k_0 M^{-j}.$$

Notons que, si $\phi: M \rightarrow N$ est un morphisme de modules de type L , ϕ préserve la décomposition de Lefschetz, et $\text{Ker } \phi$, $\text{Coker } \phi$ et $\text{Im } \phi$ sont de type L .

Soient M et N des $\mathcal{C}$ -modules de type L , on dit que $\phi: M \rightarrow N$ est un morphisme de degré 1, si ϕ est $\mathcal{C}$ -linéaire, $\phi(M^i) \subset N^{i+1}$ et $l\phi = \phi l$.

4.1.2. Lemme. *Soit $\phi: M \rightarrow N$ un morphisme de degré 1 de $\mathcal{C}$ -modules de type L , on a alors*

$$\phi({}_0M^{-i}) \subset {}_0N^{-i+1} \oplus l_0N^{-i-1} \quad \text{et} \quad \phi(M_i) \subset N_{i-1} \oplus N_{i+1}.$$

(Car $\phi({}_0M^{-i}) \subset \bigoplus_{k \geq 0} N_{i-1+2k}^{-i+1}$ et $l^{i+1}\phi({}_0M^{-i}) = 0$.)

4.1.3. Lemme. *Soit $\phi: M \rightarrow N$ un morphisme de degré 1, on définit*

$$\text{Im}^0 \phi = \bigoplus_{j,k} l^k(\text{Im } \phi \cap {}_0N^{-j}),$$

alors $\text{Im}^0 \phi$ est de type L ; de plus, on a

$$({}_0\text{Im}^0 \phi)^{-j+1} = \text{Im } \phi \cap {}_0N^{-j+1} = {}_0\phi_j({}_0^+\phi_j^{-1}({}_0l_0(\text{Im}^0 \phi)^{-j-1}))$$

où $\phi|_{M_j} = {}^+\phi_j + {}^-\phi_j$ avec ${}^\pm\phi_j(M_j) \subset N_{j\pm 1}$, et ${}^\pm\phi_j = {}^\pm\phi_j|_{{}_0M^{-j}}$.

Preuve. La première assertion et la première égalité sont claires. Soit $v \in \text{Im } \phi \cap {}_0N^{-j+1}$, on a alors

$$v = \phi(u - u') \quad \text{avec} \quad u \in {}_0M^{-j} \quad \text{et} \quad u' \in \bigoplus_{k > 0} l^k_0 M^{-j-2k}.$$

D'après 4.1.1, on a ${}^-\phi_j u = v$ et ${}^+\phi_j u = \phi u' \in l(\text{Im } \phi) \cap N_{j+1}^{-j+1} = l(\text{Im } \phi \cap {}_0N^{-j-1})$, car $N_{j+1}^{-j+1} = l_0 N^{-j-1}$ et $l: N^{-j-1} \rightarrow N^{-j+1}$ est injectif si $j \geq 0$. On a donc démontré l'inclusion $\subset$; la réciproque est claire.

4.1.4. Lemme. *Soit $i = \min\{j \mid M_j \neq 0\}$, on a alors*

$$\text{Im } \phi \cap N_{i-1} = (\text{Im}^0 \phi)_{i-1}.$$

Preuve. L'inclusion $\supset$ est claire. Soit $v \in (\text{Im } \phi \cap N_{i-1})^j$, alors on peut supposer que $j = -i + 1 + 2k$ avec $0 \leq k \leq i - 1$. Puisque $N_{i-1}^j = l^k_0 N^{-i+1}$ et $(\text{Im } \phi)^j = l^k(\text{Im } \phi)^{-i+1}$ par définition de i , on a

$$(\text{Im } \phi \cap N_{i-1})^j = l^k(\text{Im } \phi \cap {}_0N^{-i+1})$$

car $l^k: N^{-i+1} \rightarrow N^j$ est injectif; d'où l'assertion.

4.1.5. Lemme. Soit $\text{Im}^1\phi = \text{Im } \phi / \text{Im}^0\phi$, alors $(\text{Im}^1\phi)$ [1] est de type L , ou $(M[1])^i = M^{i+1}$.

Preuve. Par récurrence sur $\sharp\{i \mid M_i \neq 0\}$. Si $M = M_i$, on a $\text{Im}^1\phi = \text{Im } \phi / \text{Im } \phi \cap N_{i-1} = \text{Im}^+\phi_i$, d'après 4.1.4, d'où l'assertion, car $\text{Im}^+\phi_i = \bigoplus_{0 \leq k \leq i} l^{k+}\phi_{i0}M^{-i}$.

Dans le cas général, on peut supposer que

$$M = \bigoplus_{k \geq 0} M_{i+2k} \quad \text{et} \quad N = \bigoplus_{k \geq 0} N_{i-1+2k}.$$

Posons $M' = \bigoplus_{k > 0} M_{i+2k}$, $\phi' = \phi|_{M'}$, on a alors

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im}^0\phi' & \longrightarrow & \text{Im } \phi' & \longrightarrow & \text{Im}^1\phi' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im}^0\phi & \longrightarrow & \text{Im } \phi & \longrightarrow & \text{Im}^1\phi \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im}^0\phi / \text{Im}^0\phi' & \longrightarrow & \text{Im } \phi / \text{Im } \phi' & \longrightarrow & \text{Im}^1\phi / \text{Im}^1\phi' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

et, par hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que $(\text{Im}^1\phi / \text{Im}^1\phi')$ [1] est de type L .

Soit $\bar{N} = N / (\text{Im}^0\phi')_{i+1}$, soit $\psi: M \xrightarrow{\phi} N \rightarrow \bar{N}$, et soit $\psi' = \psi|_{M'}$, on a alors

$$\text{Im } \phi / \text{Im } \phi' \xrightarrow{\sim} \text{Im } \psi / \text{Im } \psi' \simeq \text{Im } \psi_i, \quad \text{où } \psi_i = \psi|_{M_i},$$

car $\text{Im } \psi^* = \text{Im } \phi^* / (\text{Im}^0\phi')_{i+1}$ pour $* = \emptyset, '$, et $\text{Im } \psi' \cap \bar{N}_{i+1} = 0$ (car $(\text{Im}^0\phi')_{i+1} = \text{Im } \phi' \cap N_{i+1}$). D'après 4.1.3, $(\text{Im}^0\phi)_{j-1}$ ne dépend que de $\phi|_{\bigoplus_{k \leq j} M_k}$, en particulier, on a

$$(\text{Im}^0\phi)_{i+1} = (\text{Im}^0\phi')_{i+1} \quad \text{et} \quad (\text{Im}^0\psi)_{i+1} = (\text{Im}^0\psi')_{i+1} = 0$$

car $(\text{Im}^0\psi)_{i+1} = \text{Im}((\text{Im}^0\phi')_{i+1} \rightarrow \bar{N}_{i+1})$ d'après 4.1.3; on a alors

$${}_0^+\phi_i^{-1}(l_0(\text{Im}^0\phi)^{-i-1}) = {}_0^+\psi_i^{-1}(l_0(\text{Im}^0\psi)^{-i-1}) = \text{Ker } {}_0^+\psi_i$$

et $\text{Im}^0\phi / \text{Im}^0\phi' = (\text{Im}^0\phi)_{i-1} = (\text{Im}^0\psi)_{i-1} = \text{Im}^0\psi_i$, d'après 4.1.3. On a donc démontré que

$$\text{Im}^1\phi / \text{Im}^1\phi' \simeq \text{Im}^1\psi / \text{Im}^1\psi' \simeq \text{Im } \psi_i / \text{Im}^0\psi_i \simeq \text{Im}^1\psi_i,$$

et l'assertion est réduite au cas $M = M_i$; d'où l'assertion.

4.1.6. Lemme. Soient $\phi: M \rightarrow N$ et $\psi: N \rightarrow M$ des morphismes de degré

1 de $\mathbf{C}$ -modules gradués de type L , soient

$$\langle, \rangle: M \times M \rightarrow \mathbf{C}, \quad \langle, \rangle: N \times N \rightarrow \mathbf{C}$$

les dualités telles que $\langle M^i, M^j \rangle = \langle N^i, N^j \rangle = 0$ pour $i+j \neq 0$, $\langle x, y \rangle = \pm \langle y, x \rangle$ et $\langle lx, y \rangle = \pm \langle x, ly \rangle$ pour $x, y \in M$ ou N , et $\langle \phi x, y \rangle = \pm \langle x, \psi y \rangle$ pour $x \in M$, $y \in N$; on a alors

$$\dim(\operatorname{Im}^0 \phi)^i = \dim(\operatorname{Im}^1 \psi)^{i+1}, \quad \dim(\operatorname{Im}^0 \psi)^i = \dim(\operatorname{Im}^1 \phi)^{i+1},$$

si la dimension de M et N est finie.

Preuve. Soient $a_i = \dim(\operatorname{Im}^0 \phi)^i$, $b_i = \dim(\operatorname{Im}^1 \phi)^{i+1}$, $c_i = \dim(\operatorname{Im}^0 \psi)^i$ et $d_i = \dim(\operatorname{Im}^1 \psi)^{i+1}$, alors $*_i = *_{-i}$ pour $* = a, b, c, d$, et

$$a_{i+1} + b_i = c_{-i} + d_{-i-1} \quad \text{pour tout } i,$$

car $\operatorname{rang}(\phi: M^i \rightarrow N^{i+1}) = \operatorname{rang}(\psi: N^{-i-1} \rightarrow M^{-i})$ par hypothèse; on a donc

$$a_{i+1} - d_{i+1} = c_i - b_i = c_{-i} - b_{-i} = a_{-i+1} - d_{-i+1} = a_{i-1} - d_{i-1}.$$

Puisque $a_i = d_i = 0$ pour $|i| \gg 0$, on obtient $a_i = d_i$, $b_i = c_i$; d'où l'assertion.

4.1.7. Définition. Soit M un $\mathbf{C}$ -module gradué de type L , on dit que M est de type H - L (Hodge-Lefschetz) de poids p , si chaque M^i est muni d'une structure de Hodge de poids $p+i$ telle que $l: M^i \rightarrow M^{i+2}(1)$ est un morphisme de structures de Hodge. Une polarisation de M est une famille de dualités de structures de Hodge

$$\langle, \rangle: M^{-i} \times M^i \rightarrow \mathbf{Q}(-p), \quad i \in \mathbf{Z},$$

telle que $\langle x, y \rangle = \pm \langle y, x \rangle$ et $\langle lx, y \rangle = \pm \langle x, ly \rangle$ et que

$$\langle *, l^i * \rangle: {}_0 M^{-i} \times {}_0 M^{-i} \rightarrow \mathbf{Q}(-p+i)$$

soit une polarisation de structure de Hodge à un signe pres, où $\mathbf{Q}(p)$ signifie la structure de Hodge de rang un de poids $-2p$, cf. [6].

Soit M (resp. N) un module gradué de type H - L de poids p (resp. $p-1$), alors un morphisme de degré 1 des modules gradués de type H - L est une famille de morphismes de structures de Hodge

$$\psi: M^i \rightarrow N^{i+1}$$

compatible avec l'action de l . Par hypothèse, $\operatorname{Im}^0 \phi$ (resp. $(\operatorname{Im}^1 \phi)[1]$) est de type H - L de poids $p-1$ (resp. p). Si M et N sont polarisés, on dit que $\psi: N \rightarrow M(1)$ est dual de ϕ si $\langle \phi x, y \rangle = \pm \langle x, \psi y \rangle$ pour $x \in M$, $y \in N$.

4.1.8. Lemme. Soient $\phi: M \rightarrow N$ et $\psi: N \rightarrow M(1)$ des morphismes de degré 1 de modules gradués de type H - L polarisés. Supposons que ϕ et ψ sont duaux l'un à l'autre, alors

$${}^+\phi_j: (\text{Im}^0\psi)_j \rightarrow N_{j+1} \quad (j \geq 0) \quad \text{et} \quad \phi: \text{Im}^0\psi \rightarrow N$$

sont injectifs; si, de plus, $(\phi\psi)^2=0$ et $j>0$,

$$\bar{0}\phi_j: {}_0(\text{Im}^0\psi)^{-j} \rightarrow N_{j-1}^{-j+1}$$

est aussi injectif.

Preuve. Soit $v=\psi(u) \in {}_0(\text{Im}^0\psi)^{-j}$. Si $\phi(l^jv)=0$, on a

$$\langle Cv, l^j\bar{v} \rangle = \pm \langle Cu, \phi(l^j\bar{v}) \rangle = 0$$

donc $v=0$ car $v \in {}_0M^{-j}$. Puisque $\phi(l^jv) = {}^+\phi_j(l^jv)$ et $(\text{Im}^0\psi)_j = \bigoplus_{0 \leq k \leq j} l^k {}_0(\text{Im}^0\psi)^{-j}$, on obtient la première assertion. Si $j>0$, $v \in {}_0(\text{Im}^0\psi)^{-j}$ et $\bar{0}\phi_j(v)=0$, i.e. $\phi(v) = {}^+\phi_j(v) \in N_{j+1}^{-j+1}$, alors il existe $w \in {}_0N^{-j-1}$ tel que $\phi(v)=lw$. Puisque $(\phi\psi)^2=0$, on a

$$\langle Cw, l^{j+1}\bar{w} \rangle = \pm \langle Clw, l^{j-1}\bar{l}w \rangle = \pm \langle C\phi\psi u, l^{j-1}\phi\psi\bar{u} \rangle = 0$$

où $\psi(u)=v$; on a donc $\phi(v)=0$ et $v=0$, d'où la dernière assertion. La deuxième assertion est claire, car $\text{Im}^0\psi = \bigoplus (\text{Im}^0\psi)_j$, $\phi = \bigoplus ({}^+\phi_j + {}^-\phi_j)$ et ${}^+\phi_j: (\text{Im}^0\psi)_j \rightarrow N_{j+1}$ est injectif ($j \geq 0$).

4.1.9. Lemme. Soient ϕ et ψ comme dans 4.1.8. Si $\phi\psi\phi=0$, les morphismes

$$\text{Im}^0\phi \xrightarrow{\psi} \text{Im} \psi\phi \rightarrow \text{Im}^1\psi \quad \text{et} \quad \text{Im}^0\psi \xrightarrow{\phi} \text{Im} \phi\psi \rightarrow \text{Im}^1\phi$$

sont des isomorphismes; en particulier, on a des décompositions

$$\text{Im} \phi = \text{Im}^0\phi \oplus \text{Im} \phi\psi, \quad \text{Im} \psi = \text{Im}^0\psi \oplus \text{Im} \psi\phi$$

telles que

$$\begin{aligned} \psi: \text{Im}^0\phi &\xrightarrow{\sim} \text{Im} \psi\phi, & \psi(\text{Im} \phi\psi) &= 0, \\ \phi: \text{Im}^0\psi &\xrightarrow{\sim} \text{Im} \phi\psi, & \phi(\text{Im} \psi\phi) &= 0. \end{aligned}$$

Preuve. D'après 4.1.8, on a $\text{Im} \psi\phi \cap \text{Im}^0\psi = 0$, car $\text{Im} \psi\phi \subset \text{Ker} \phi$; donc $\text{Im} \psi\phi \rightarrow \text{Im}^1\psi$ est injectif. De plus, 4.1.8 implique que $\psi: \text{Im}^0\phi \rightarrow \text{Im} \psi\phi$ est aussi injectif, alors les isomorphismes

$$\text{Im}^0\phi \xrightarrow{\psi} \text{Im} \psi\phi \xrightarrow{\sim} \text{Im}^1\psi$$

résultent de 4.1.6.

(De même argument pour l'assertion duale, car $\psi\phi\psi = \pm(\phi\psi\phi)^* = 0$.)

4.1.10. Lemme. Soient ϕ et ψ comme dans 4.1.8. Si $\phi\psi\phi = 0$, $\text{Ker } \phi / \text{Im } \psi\phi$ est de type $H-L$, sur lequel la polarisation de M induit une polarisation (i.e. la partie primitive de $\text{Ker } \phi / \text{Im } \psi\phi$ est représentée par celle de M ; notons que la dualité induite est bien définie, car $\langle \text{Ker } \phi, \text{Im } \psi \rangle = 0$).

Preuve. Soient ${}^0N = \text{Im } {}^0\phi$, ${}^1N = ({}^0N)^\perp = \{x \in N \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in {}^0N\}$, alors 0N et 1N sont de type $H-L$ polarisé, et $\text{Im } \phi\psi \subset {}^1N$. Soient $\phi = {}^0\phi \oplus {}^1\phi$ avec $\text{Im } {}^a\phi \subset {}^aN$ ($a=0, 1$), et $\psi = {}^0\psi \oplus {}^1\psi$ avec ${}^a\psi = \psi|_{{}^aN}$ ($a=0, 1$), alors ${}^a\phi$ et ${}^a\psi$ sont duaux l'un à l'autre, et $\text{Ker } \phi = \text{Ker } {}^0\phi \cap \text{Ker } {}^1\phi$, $\text{Im } \psi\phi = \psi(\text{Im } {}^0\phi) = \text{Im } ({}^0\psi)$. Puisque

$$\text{Ker } \phi / \text{Im } \psi\phi = \text{Ker } ({}^1\phi : \text{Ker } ({}^0\phi) / \text{Im } ({}^0\psi) \rightarrow \text{Im } \phi\psi[1]),$$

on peut remplacer N, ϕ, ψ par ${}^0N, {}^0\phi, {}^0\psi$, car $\text{Im } \phi\psi[1]$ est de type $H-L$; donc on peut supposer que

$$\text{Im } \phi = \text{Im } {}^0\phi = N, \quad \text{Im } \psi\phi = \text{Im } \psi \quad \text{et} \quad \phi\psi = 0.$$

Soient $\phi = \bigoplus_j \phi_j$ avec $\text{Im } \phi_j \subset N_j$, et $\psi = \bigoplus_j \psi_j$ avec $\psi_j = \psi|_{N_j}$, alors ϕ_j et ψ_j sont duaux l'un à l'autre. Puisque

$$\text{Ker } \phi / \text{Im } \psi = \text{Ker } ({}_j\phi : \text{Ker } \phi' / \text{Im } \psi' \rightarrow N_j) / \text{Im } ({}_j\psi : N_j \rightarrow \text{Ker } \phi' / \text{Im } \psi'),$$

où $\phi' = \bigoplus_{i \neq j} \phi_i$ et $\psi' = \bigoplus_{i \neq j} \psi_i$, on peut supposer que $N = N_j$ par récurrence. Soient $\psi = {}^+\psi \oplus {}^-\psi$ avec $\text{Im } ({}^\pm\psi) \subset M_{j \pm 1}$ et ${}^\pm\psi = {}^\pm\psi|_{{}^0N^{-j}}$, soit

$${}^0M = \left(\bigoplus_{0 \leq k \leq j+1} l^{k-1} \text{Im } {}^+\psi \right) \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq k \leq j} l^k \text{Im } {}^-\psi \right),$$

i.e. 0M est le plus petit sous-module gradué de type $H-L$ contenant $\text{Im } \psi$; posons ${}^1M = ({}^0M)^\perp$, alors $M = {}^0M + {}^1M$ et il suffit de montrer que ${}^1M \xrightarrow{\sim} \text{Ker } \phi / \text{Im } \psi$.

Puisque 0M est de type $H-L$ polarisé, on peut supposer que $M = {}^0M$, i.e. ${}^1M = 0$, alors

$${}^+\psi : N \rightarrow \bigoplus_{0 \leq k \leq j} M_{j+1}^{-j+1+2k} \quad \text{et} \quad {}^-\psi : \bigoplus_{1 \leq k \leq j} N^{-j+2k} \rightarrow M_{j-1}$$

sont bijectifs d'après 4.1.8; en particulier, on a

$$\dim M^{-j-1+2k} = \begin{cases} 2n & \text{si } 0 < k < j+1 \\ n & \text{si } k = 0 \text{ ou } j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\dim N^{-j+2k} = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq k \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $n = \dim N^{-j}$; on a donc $\text{Ker } \phi / \text{Im } \psi = 0$ car $\psi: N^{-j+2k} \rightarrow M^{-j+1+2k}$ est injectif et $\phi: M^{-j-1+2k} \rightarrow N^{-j+2k}$ est surjectif. Ce qui achève la démonstration.

4.2. Structure de Hodge bigraduée polarisée

4.2.1. Soit $L = \bigoplus_{i,j} L_i^j$ un $\mathcal{C}$ -module gradué bigradué. On dit que L est de type H - L de poids p , si chaque L_i^j est muni d'une structure de Hodge de poids $i+j+p$ et si on a des morphismes de structures de Hodge

$$N: L_i^j \rightarrow L_{i-2}^j(-1), \quad l: L_i^j \rightarrow L_i^{j+2}(1) \quad (i, j \in \mathbb{Z})$$

tels que $Nl = lN$, $N^i: L_i^j \xrightarrow{\sim} L_{i-2}^j(-i)$ pour $i \geq 0$ et $l^j: L_i^j \xrightarrow{\sim} L_i^{j+2}(j)$ pour $j \geq 0$.

Une polarisation de L est une famille de dualités de structures de Hodge

$$\langle, \rangle: L_{-i}^{-j} \times L_i^j \rightarrow \mathcal{Q}(-p)$$

telles que $\langle x, y \rangle = \pm \langle y, x \rangle$, $\langle lx, y \rangle = \pm \langle x, ly \rangle$ et $\langle Nx, y \rangle = \pm \langle x, Ny \rangle$ et que

$$\langle *, N^i l^j * \rangle: {}_0L_i^{-j} \times {}_0L_i^j \rightarrow \mathcal{Q}(-p-i+j)$$

est une polarisation à un signe près pour $i, j \geq 0$, où

$${}_0L_i^{-j} = \text{Ker } N^{i+1} \cap \text{Ker } l^{j+1}.$$

Une différentielle de L est une famille de morphismes de structures de Hodge

$$d: L_i^j \rightarrow L_{i-1}^{j+1}$$

tels que $d^2 = 0$, $dl = ld$, $dN = Nd$ et $\langle dx, y \rangle = \pm \langle x, dy \rangle$.

4.2.2. Proposition. Soit L un module bigradué de type H - L polarisé muni d'une différentielle d , alors $\text{Ker } d / \text{Im } d$ est de type H - L , sur lequel la polarisation de L induit une polarisation.

Preuve. Posons $C_{ih}^j = N^h(P_N L_{i+h}^j)$ si $i, h \geq 0$ et 0 sinon, où $P_N L_i^j = \text{Ker } N^{i+1} (\subset L_i^j)$, on a alors

$$L_i^j = \bigoplus_{h-k=i} C_{hk}^j, \quad \text{et} \quad N^{i-k}: C_{ih}^j \xrightarrow{\sim} C_{ki}^j(k-i) \quad \text{si } i \geq k.$$

D'après 4.1.2, on a

$$dC_{i,0}^j \subset C_{i-1,0}^{j+1} \oplus C_{i,1}^{j+1} \quad \text{et} \quad dC_{i,k}^j \subset C_{i-1,k}^{j+1} \oplus C_{i,k+1}^{j+1}$$

car $dN = Nd$. Posons $d|_{C_{ih}^j} = {}^+d + {}^-d$ avec $\text{Im } {}^+d \subset C_{i,k+1}^{j+1}$ et $\text{Im } {}^-d \subset C_{i-1,k}^{j+1}$, on

a alors des relations $+d^2 = -d^2 = 0$, $+d^-d + -d^+d = 0$, car $d^2 = 0$. Puisque $\pm dN = N\pm d$, $\pm d$ est donné par

$$\tau = -d: C_{i+1,0}^j \rightarrow C_{i,0}^{j+1} \quad \text{et} \quad \rho = N^{-1} \circ +d: C_{i,0}^j \rightarrow C_{i+1,0}^{j+1}(1)$$

pour $i \geq 0$, où $N^{-1}: C_{i,1}^{j+1} \xrightarrow{\sim} C_{i+1,0}^{j+1}(1)$; de plus, τ et ρ sont duaux par les dualités

$$\langle *, N^i * \rangle: C_{i,0}^j \times C_{i,0}^{-j} \rightarrow \mathbf{Q}(-p-i),$$

car $-d: C_{i+1,0}^j \rightarrow C_{i,0}^{j+1}$ et $+d: C_{0,i}^{-j-1} \rightarrow C_{0,i+1}^{-j}$ sont duaux par les dualités

$$\langle , \rangle: C_{i,k}^j \times C_{k,i}^{-j} \rightarrow \mathbf{Q}(-p)$$

(notons que la dualité est compatible avec la décomposition de Lefschetz rel. à N).

Posons $C_{i,k} = \bigoplus_j C_{i,k}^j$ et $C_i = C_{i,0}$ ($i \geq 0$), alors on peut appliquer les résultats de 4.1 à $\tau: C_{i+1} \rightarrow C_i$ et $\rho: C_i \rightarrow C_{i+1}(1)$ pour $i \geq 0$, car $\tau\rho\tau = -\tau^2\rho = 0$; en particulier, $\text{Ker } \rho / \text{Im } \tau\rho$ est de type H - L polarisé d'après 4.1.10.

On définit des sous-modules gradués de $C_{i,k}$ pour $i, k \geq 0$ par

$$Z_{ik} = \begin{cases} N^k(\text{Ker } \rho) & \text{si } i = 0 \\ N^k(\text{Ker } \rho \cap \text{Ker } \tau) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B_{ik} = \begin{cases} N^k(\text{Im } \rho) & \text{si } i = 0, k > 0 \\ N^k(\text{Im } \tau\rho) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\text{Ker } \rho$, $\text{Im } \rho$, etc. sont des sous-modules de C_{i+k} . Posons $H_{ik} = Z_{ik}/B_{ik}$, on a alors

$$H_{i,0} = \text{Ker}({}^1\tau: (\text{Ker } \rho / \text{Im } \tau\rho) \rightarrow (\text{Im } \tau\rho)[1]) \quad \text{pour } i > 0,$$

car $\text{Ker}({}^0\tau) = \text{Ker}({}^0\rho)$, où $\tau = {}^0\tau + {}^1\tau$, $\rho = {}^0\rho + {}^1\rho$ avec $\text{Im}({}^0\tau) = \text{Im } {}^0\tau$, $\text{Im}({}^1\tau) = \text{Im } \tau\rho$ (de même pour ρ). Puisque $(\text{Im } \tau\rho)[1]$ est de type H - L d'après 4.1.9, $H_{i,0}$ est de type H - L polarisé; donc l'assertion résulte du lemme suivant:

4.2.3. Lemme. Posons $H_i = \text{Ker}(d: L_i \rightarrow L_{i-1}) / \text{Im}(d: L_{i+1} \rightarrow L_i)$ où $L_i = \bigoplus_j L_i^j$, alors les inclusions naturelles $\bigoplus_{i-k=j} H_{ik} \rightarrow H_j$ sont des isomorphismes; de plus on a

$$N^i: H_{i0} \xrightarrow{\sim} H_{0i}(-i) \quad \text{pour } i \geq 0,$$

en particulier, H_{i0} est la partie primitive de H_i .

Preuve. Soit $u = \sum u_k \in \text{Ker}(d: L_i \rightarrow L_{i-1})$ avec $u_k \in C_{i+k,k}$, posons $v_k = +d u_k = -d u_{k+1} \in C_{i+k,k+1}$. Pour $i+k \geq 0$, $k \geq 0$ on a

$$v_k \in N^{k+1}(\text{Im } \tau \cap \text{Im } \rho) \subset N^{k+1}(\text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \rho),$$

donc $v_k \in N^{k+1}(\text{Im } \tau \rho)$ d'après 4.1.9. Soit $w_k \in C_{i+2k+1,0}$ tel que $N^{k+1} \tau \rho w_k = v_k$ pour $i+k \geq 0, k \geq 0$, posons

$$w = \sum N^k w_k \in L_{i+1}, \quad u' := u + dw = \sum u'_k$$

avec $u'_k \in C_{i+k,k}$, alors $u'_k = u_k + {}^{-}dN^k w_k + {}^{+}dN^{k-1} w_{k-1}$, donc ${}^{+}d u'_k = {}^{+}d u_k + {}^{+}d {}^{-}dN^k w_k = v_k + N^{k+1} \rho \tau w_k = 0$ pour $i+k \geq 0, k \geq 0$, d'où la surjectivité de $\oplus H_{i+k,k} \rightarrow H_i$, car $u_{-1} = 0$.

Soit $u = \sum u_k \in L_{i+1}$ avec $u_k \in C_{i+k+1,k}$, soit $v = du = \sum v_k$ avec $v_k \in C_{i+k,k}$, alors $v_k = {}^{-}d u_k + {}^{+}d u_{k-1}$. Supposons que $v_k \in Z_{i+k,k}$, alors ${}^{+}d v_k = 0$ implique que ${}^{+}d {}^{-}d u_k = 0$, donc ${}^{-}d u_k \in N^k \text{Im } \tau \rho$ d'après 4.1.9. Si $i+k > 0$, on a ${}^{+}d u_k \in N^{k+1} \text{Im } \tau \rho$ par le même argument. On a donc

$$(\oplus_k Z_{i+k,k}) \cap \text{Im}(d: L_{i+1} \rightarrow L_i) \subset \oplus_k B_{i+k,k}$$

car ${}^{+}d u_{k-1} \in N^k \text{Im } \rho$ et ${}^{+}d u_{-1} = 0$. Puisque la réciproque est claire, on obtient l'injectivité de $\oplus H_{i+k,k} \rightarrow H_i$.

Maintenant démontrons:

$$(4.2.3.1) \quad (\text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \rho) / \text{Im } \tau \rho \xrightarrow{\sim} \text{Ker } \rho / \text{Im } \rho$$

où $\text{Ker } \tau$, etc. sont des sous-modules de $C_{i,0}$ ($i > 0$).

Soit $u \in (\text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \rho) \cap \text{Im } \rho$, alors $u \in \text{Im } \tau \rho$ d'après 4.1.9, d'où l'injectivité. Soit $u \in \text{Ker } \rho$. Puisque $\tau(u) \in \text{Ker } \rho$, on a $\tau(u) \in \text{Im } \tau \rho$ d'après 4.1.9, i.e. il existe $v \in C_{i-1,0}$ tel que $\tau(u) = \tau \rho(v)$, donc $u - \rho(v) \in \text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \rho$; d'où la surjectivité. Ce qui achève la démonstration de 4.2.3 et de 4.2.2.

4.2.4. Corollaire. Soit $'L_i^j = (\text{Im } N)_{i-1}^j$, soient

$$\text{can} = N: L_i^j \twoheadrightarrow 'L_{i-1}^j \quad \text{et} \quad \text{Var} = \text{id}: 'L_i^j \hookrightarrow L_{i-1}^j,$$

alors

$$\text{Im}(H(\text{can}): H(L) \rightarrow H('L)) \oplus \text{Ker}(H(\text{Var}): H('L) \rightarrow H(L)) = H('L)$$

ou $H(L) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ (de même pour $H('L)$).

Preuve. Il faut montrer que $\text{Ker}(H(\text{Var})) \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(H(\text{can}))$. Soit $'L = \oplus 'C_{ik}$ la décomposition de Lefschetz comme dans 4.2.2, alors

$$'C_{ik} = C_{i,k+1} \quad \text{si } i, k \geq 0 \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon,}$$

en particulier, 4.2.3 reste valable pour $'L$, on a donc

$$H('L)_{ik} = \begin{cases} N^{k+1}((\text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \rho)/\text{Im } \tau\rho) & \text{si } i > 0, k \geq 0 \\ N^{k+1}(\text{Ker } \rho/\text{Im } \rho) & \text{si } i = 0, k > 0 \\ N^{k+1}(\text{Ker } \rho/\text{Im } \tau\rho) & \text{si } i = k = 0. \end{cases}$$

Puisque $\text{can}(C_{ik}) \subset 'C_{i-1,k}$ et $\text{Var}('C_{i,k}) \subset C_{i,k+1}$, 4.2.3 implique que

$\text{Coker } H(\text{can})_{ik} = N(\text{Ker } \rho/\text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \rho)$ si $i=k=0$ et 0 sinon,

$\text{Ker } H(\text{Var})_{ik} = N(\text{Im } \rho/\text{Im } \tau\rho)$ si $i = k = 0$ et 0 sinon.

On a donc $\text{Ker } H(\text{Var}) \xrightarrow{\sim} \text{Coker } H(\text{can})$, car

$$(\text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \rho)/\text{Im } \tau\rho \xrightarrow{\sim} \text{Ker } \rho/\text{Im } \rho \quad \text{d'après (4.2.3.1)}$$

d'où l'assertion.

4.2.5. Remarque. Soient X une variété complexe lisse, S un disque ouvert, $f: X \rightarrow S$ un morphisme projectif. Supposons que f est lisse sur $S \setminus \{0\}$ et que $X_0 = f^{-1}(0)$ est un diviseur réduit à croisements normaux. Steenbrink [29] a construit une suite spectrale pour la filtration par le poids:

$$(4.2.5.1) \quad E_1^{-r, q+r} = \bigoplus_{k \geq 0, -r} H^{q-r-2k}(\tilde{X}^{(2k+r+1)}, \mathbb{Q})(-r-k) \Rightarrow H^q(X_\infty, \mathbb{Q}).$$

Posons $L_i^j = E_1^{-i, i+j+n}$ où $\dim X = n+1$, alors $L = \bigoplus L_i^j$ est un module bigradué de type H - L polarisé. Puisque $E_2 = E_\infty$, 4.2.2 implique que la filtration induite sur $H(X_\infty, \mathbb{C})$ est la filtration de monodromie (à un décalage près). Une démonstration de ce fait est donnée dans [loc. cit.], mais, comme El Zein l'a remarqué, la démonstration de $\nu^* \xi = \theta \eta$ (p. 254, $\uparrow$ l. 12) n'est pas complète.

Dans [30], Steenbrink généralise ce résultat au cas non réduit, mais la démonstration de 'Lefschetz Vache' pour une V -variété projective [loc. cit., (1.13)] n'est pas correcte, car $\pi_*[D] = 0$ implique seulement $\pi_*([D] \cap \pi^* \eta) = 0$ (il faut donc utiliser [1. (6.2.10)] ou 5.3.1, car $\mathcal{C}_X[\dim X] = \mathcal{GC}(X)$ si X est une V -variété.)

Notons que 4.2.2 implique le théorème local des cycles invariants sous la condition que X_0 est un diviseur à croisements normaux et cohomologiquement de Kähler, i.e. il existe $\omega \in H^2(X_0, \mathbb{R})$ dont la restriction à chaque composant de $\tilde{X}_0$ est une classe de Kähler (on ne suppose pas que f est projectif, mais seulement que f est propre, cf. [5].)

4.2.6. Remarque. Récemment Deligne m'a donné une nouvelle démonstration de 4.2.2 avec les signes exacts, en utilisant l'analyse harmonique sur les espaces vectoriels de dimension finie [11. II]. Pour l'appliquer à (4.2.5.1), il faut utiliser 5.2.16 pour vérifier les signes. (On ne peut pas utiliser le résultat de Schmid

avant que la conclusion de 4.2.2 soit démontrée pour (4.2.5.1).)

§ 5. Modules de Hodge Polariables

5.1. Modules de Hodge

5.1.1. Soit k un sous-corps de R . Soit $MF_h(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -Modules holonomes munis d'une bonne filtration F (i.e. $Gr^F M$ sont cohérents sur $Gr^F \mathcal{D}_X$.) Soit $\text{Perv}(k_X)$ (resp. $\text{Perv}(\mathcal{C}_X)$) la catégorie des faisceaux pervers définis sur k_X (resp. $\mathcal{C}_X$), cf. [1]. Le foncteur

$$DR: MF_h(\mathcal{D}_X) \rightarrow \text{Perv}(\mathcal{C}_X) \quad (\text{resp. } \otimes_k \mathcal{C}: \text{Perv}(k_X) \rightarrow \text{Perv}(\mathcal{C}_X))$$

est exact et fidèle, cf. 2.4.15. Remarque (2). (Dans ce paragraphe la composition $\text{Forget} \circ DR$ sera notée DR , cf. 2.4.11.) On définit

$$MF_h(\mathcal{D}_X, k) = MF_h(\mathcal{D}_X) \times_{\text{Perv}(\mathcal{C}_X)} \text{Perv}(k_X)$$

i.e. les objets de $MF_h(\mathcal{D}_X, k)$ sont les couples $((M, F), K) \in MF_h(\mathcal{D}_X) \times \text{Perv}(k_X)$ munis d'un isomorphisme

$$\alpha: DR(M) \simeq \mathcal{C} \otimes_k K \quad \text{dans} \quad \text{Perv}(\mathcal{C}_X),$$

et les morphismes sont les couples de morphismes compatibles avec les isomorphismes α . Alors les projections naturelles:

$$MF_h(\mathcal{D}_X, k) \rightarrow MF_h(\mathcal{D}_X) \quad \text{et} \quad MF_h(\mathcal{D}_X, k) \rightarrow \text{Perv}(k_X)$$

sont fidèles. Soit $MG_h(\mathcal{B}_X)$ la catégorie des $\mathcal{B}_X$ -Modules gradués cohérents M , tels que $\lim_{\rightarrow} M_i$ soient holonomes. On définit similairement

$$MG_h(\mathcal{B}_X, k) = MG_h(\mathcal{B}_X) \times_{\text{Perv}(\mathcal{C}_X)} \text{Perv}(k_X),$$

alors $MG_h(\mathcal{B}_X, k)$ est une catégorie abélienne, et $MF_h(\mathcal{D}_X, k)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $MG_h(\mathcal{B}_X, k)$ des objets (M, K) tels que l'action de $1 \in \mathcal{B}_1$ sur M , soit injective.

5.1.2. Lemme. *$MF_h(\mathcal{D}_X, k)$ est une catégorie exacte, dont une suite courte est exacte ssi ses projections dans $MF_h(\mathcal{D}_X)$ et $\text{Perv}(k_X)$ sont exactes. De plus Ker , Coker , Im et Coim existent toujours dans $MF_h(\mathcal{D}_X, k)$.*

Preuve. La première assertion est claire. La dernière résulte du fait que Ker et Coker existent dans $MF_h(\mathcal{D}_X)$ et $\text{Perv}(k_X)$, et sont compatibles avec l'isomorphisme α .

5.1.3. Soient $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ et $n \in \mathbf{Z}$. On définit:

$$(5.1.3.1) \quad (M, F, K)(n) := (M(n), F[n], K(n)), \text{ cf. (2.0.2) }.$$

Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre. Soit $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$. Si $f_*(M, F)$ (cf. 2.3) est strict, on définit:

$$(5.1.3.2) \quad \mathcal{H}^i f_*(M, F, K) = (\mathcal{H}^i f_*(M, F), {}^p \mathcal{H}^i f_* K)$$

muni de l'isomorphisme: $DR_Y \mathcal{H}^i f_*(M, F) = {}^p \mathcal{H}^i f_* DR_X(M, F) \xrightarrow{\alpha} {}^p \mathcal{H}^i f_* K \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{C}$. Notons que $f_*(M, F)$ est un Module filtré, si f est une immersion fermée.

Soit g une fonction holomorphe sur X , posons $(\tilde{M}, F) = i_{g*}(M, F)$ comme dans 3.2. Si (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de g (cf. 3.2), on définit:

$$(5.1.3.3) \quad \psi_g(M, F, K) = \left(\bigoplus_{-1 \leq \alpha < 0} (Gr_{\alpha}^V \tilde{M}, F[1]), {}^p \psi_g K \right)$$

$$\phi_{g,1}(M, F, K) = ((Gr_0^V \tilde{M}, F), {}^p \phi_{g,1} K)$$

où ${}^p \psi_g K := (\psi_g K)[-1]$ (de même pour ${}^p \phi_{g,1}$), cf. (5.2.1.1). Ici, on utilise la proposition 3.4.12 pour définir l'isomorphisme α . De plus on a les morphismes

$$(5.1.3.4) \quad N: \psi \rightarrow \psi(-1) \quad (\text{de même pour } \phi_1),$$

$$\text{can: } \psi_1 \rightarrow \phi_1 \quad \text{et} \quad \text{Var: } \phi_1 \rightarrow \psi_1(-1)$$

par la même proposition, où $\psi = \psi_g(M, F, K)$, etc. Ici, on utilise 3.4.14 pour la définition de $\text{Var: } {}^p \phi_{g,1} K \rightarrow {}^p \psi_{g,1} K$, etc.

Soit $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$. On dit que (M, F, K) est à *support strict* Z , si $\text{supp } M = Z$, et si (M, F, K) n'a ni un sous-objet, ni un objet quotient, dont le support est plus petit que Z . On dit que (M, F, K) admet la *décomposition par support strict*, si on a une décomposition (localement finie) dans $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$:

$$(5.1.3.5) \quad (M, F, K) = \bigoplus_Z (M_Z, F, K_Z)$$

telle que (M_Z, F, K_Z) est à support strict Z . Alors cette décomposition est unique, i.e. s'il y a deux isomorphismes $u_i: (M, F, K) \rightarrow \bigoplus_Z (M_Z^i, F, K_Z^i)$ ($i=1, 2$), il existe des uniques isomorphismes $v_Z: (M_Z^1, F, K_Z^1) \rightarrow (M_Z^2, F, K_Z^2)$ tels que $u_2 = (\bigoplus v_Z) u_1$. On dit que (M_Z, F, K_Z) est la Z -composante de (M, F, K) .

5.1.4. Lemme. Soient $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ et g une fonction holomorphe sur X . Supposons que (M, F) soit quasi-unipotent et régulier le long de g

(cf. 3.2), on a alors

$$(5.1.4.1) \quad \psi_g(M, F, K), \phi_{g,1}(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k}),$$

et $K, (M, F)$ et (M, F, K) n'ont pas de sous-objets (resp. objets quotients) à supports dans $g^{-1}(0)$ si $\text{can}: \psi_1 \rightarrow \phi_1$ est surjectif (resp. $\text{Var}: \phi_1 \rightarrow \psi_1(-1)$ est injectif): où $\psi_1 = \psi_{g,1}(M, F, K)$, etc.; de plus les conditions suivantes sont équivalentes:

i) On a une décomposition dans $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})$:

$$(5.1.4.2) \quad \phi_1 = \text{Ker}(\text{Var}: \phi_1 \rightarrow \psi_1(-1)) \oplus \text{Im}(\text{can}: \psi_1 \rightarrow \phi_1).$$

ii) On a une (unique) décomposition dans $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})$:

$$(5.1.4.3) \quad (M, F, K) = (M_1, F, K_1) \oplus (M_2, F, K_2)$$

telle que $\text{supp } M_2 \subset g^{-1}(0)$ et que (M_1, F, K_1) n'a ni un sous-objet, ni un objet quotient, à support dans $g^{-1}(0)$.

Preuve. Posons $(\tilde{M}, F, \tilde{K}) = i_{g*}(M, F, K)$, alors l'assertion (5.1.4.1) résulte de la définition 3.2.1 et de la preuve de 3.4.9. Puisque les sous-objets de (M, F, K) (i.e. les monomorphismes stricts dans (M, F, K)) correspondent à ceux de (M, K) dans $M_h(\mathcal{D}_X) \times_{\text{Perv}(\mathcal{C}_X)} \text{Perv}(\mathbb{k}_X)$ (de même pour (M, F)), la deuxième assertion est réduite à celle pour $\tilde{K}, \tilde{M}$ et $(\tilde{K}, \tilde{M})$. On définit:

$$\tilde{M}_1 = (V_{<0} \tilde{M}) \mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \tilde{M}_2 = i_*(\text{Ker } t: Gr_0^V \tilde{M} \rightarrow Gr_{-1}^V \tilde{M}),$$

où $i: X = X \times \{0\} \rightarrow X \times \mathbb{C}$, alors $\tilde{M}/\tilde{M}_1$ (resp. $\tilde{M}_2$) est le plus grand objet quotient (resp. sous-objet) de $\tilde{M}$ à support dans $X \times \{0\}$ d'après 3.1.8. Soit $\tilde{K}/\tilde{K}_1$ (resp. $\tilde{K}_2$) le plus grand objet quotient (resp. sous-objet) de $\tilde{K}$ à support dans $X \times \{0\}$. Par la théorie de prolongement de faisceaux pervers de Deligne-MacPherson-Verdier (voir, par exemple, [34]), $\tilde{K}_1$ (resp. $\tilde{K}_2$) correspond au diagramme:

$$(\tilde{K}|_{X \times \mathbb{C}^*}, (\psi_1 \tilde{K} \rightrightarrows \text{Im can})) \quad (\text{resp. } (0, (0, \rightrightarrows \text{Ker Var})))$$

(de même pour $\tilde{K} \otimes \mathbb{C}$); alors l'isomorphisme α induit

$$DR(\tilde{M}_1) \simeq \tilde{K}_1 \otimes \mathbb{C} \quad \text{et} \quad DR(\tilde{M}_2) \simeq \tilde{K}_2 \otimes \mathbb{C}$$

d'après 3.4.12, car $\partial_t: Gr_{-1}^V \tilde{M}_1 \rightarrow Gr_0^V \tilde{M}_1$ est surjectif par le même argument que dans la preuve de 3.2.2. (ii); donc $(\tilde{M}, \tilde{K})/(\tilde{M}_1, \tilde{K}_1)$ (resp. $(\tilde{M}_2, \tilde{K}_2)$) est le plus grand objet quotient (resp. sous-objet) à support dans $X \times \{0\}$; d'où la deuxième assertion (car DR et $\otimes \mathbb{C}$ sont exacts et fidèles, cf. 5.1.1). Prouvons

la dernière assertion. L'implication: ii) $\Rightarrow$ i) est claire. Si (5.1.4.2) est vérifiée, on a la décomposition:

$$(\tilde{M}, \tilde{K}) = (\tilde{M}_1, \tilde{K}_1) \oplus (\tilde{M}_2, \tilde{K}_2)$$

par l'argument ci-dessus, donc il suffit de montrer que cette décomposition est compatible avec la filtration F . D'après 3.2.2, l'assertion est réduite à la décomposition:

$$(V_0 \tilde{M}, F) = (V_0 \tilde{M}_1, F) \oplus (V_0 \tilde{M}_2, F)$$

Soit $u \in F_p V_0 \tilde{M}$, on a alors $u = u_1 + u_2$ avec $u_i \in V_0 \tilde{M}_i$ d'après 3.1.6; d'où $Gr_0^V u_i \in F_p Gr_0^V \tilde{M} \cap Gr_0^V \tilde{M}_i$ par la condition (5.1.4.2); donc il suffit de vérifier que l'isomorphisme dans la preuve de 3.1.8:

$$\text{Ker}(t: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}) \rightarrow \text{Ker}(t: Gr_0^V \tilde{M} \rightarrow Gr_{-1}^V \tilde{M})$$

induit un isomorphisme filtré; mais cela résulte de la condition (3.2.1.2). Ce qui achève la démonstration.

5.1.5. Corollaire. Soit $(M, F, K) \in MF_k(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$. Supposons que la condition suivante soit satisfaite:

(5.1.5.1) (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de g pour toute fonction holomorphe g localement définie sur X .

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(5.1.5.2) la condition (5.1.4.2) est satisfaite pour toute g comme ci-dessus,

(5.1.5.3) la restriction de (M, F, K) à tout ouvert de X admet la décomposition par support strict, paramétrée par des sous-ensembles fermés analytiques irréductibles.

Preuve. Puisque la décomposition est unique, la condition (5.1.5.3) est locale, alors l'équivalence résulte du lemme ci-dessus.

5.1.6. Soit $MF_k(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})_{(0)}$ la sous-catégorie pleine de $MF(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ des objets satisfaisant les conditions (5.1.5.1–3). On définit $MH(X, \mathbf{k}, n)$ les catégories des *Modules de Hodge poids n* , comme la famille (paramétrée par X et n) des plus grandes sous-catégories pleines de $MF_k(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})_{(0)}$ satisfaisant les conditions:

(5.1.6.1) Si $(M, F, K) \in MH(X, \mathbf{k}, n)$ et si $\text{supp } M = \{x\}$, il existe $(H_{\mathbf{C}}, F, H_{\mathbf{k}})$ une $\mathbf{k}$ -structure de Hodge de poids n (cf. [6]) telle que $i_{x*}(H_{\mathbf{C}}, F, H_{\mathbf{k}}) \simeq (M, F, K)$, cf. (5.1.3.2), où $i_x: \{x\} \hookrightarrow X$.

(5.1.6.2) Si $(M, F, K) \in MH(X, \mathbb{k}, n)$ et si g est une fonction holomorphe sur un ouvert U de X , on a :

$$Gr_i^W \psi_g(M, F, K), Gr_i^W \phi_{g,1}(M, F, K) \in MH(U, \mathbb{k}, i).$$

Ici W est la filtration de $\psi_g(M, K)$ (resp. $\phi_{g,1}(M, K)$) associée à l'action de N (cf. (5.1.3.4)) décalée par $n-1$ (resp. n), i.e.

$$N: W_i \psi_g \subset W_{i-2} \psi_g(-1) \quad \text{et} \quad N^j: Gr_{n-1+j}^W \psi_g \xrightarrow{\sim} Gr_{n-1-j}^W \psi_g(-j)$$

(de même pour $\phi_{g,1}$, en remplaçant $n-1$ par n), cf. 1.3.9.

En fait, soit $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})_{(j)}$ ($j > 0$) la sous-catégorie pleine de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})_{(j-1)}$ définie par :

$$(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})_{(j)} \text{ ssi } Gr_i^W \psi_g(M, F, K), Gr_i^W \phi_{g,1}(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_U, \mathbb{k})_{(j-1)} \text{ pour toute } g \text{ comme dans (5.1.6.2),}$$

et soit $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})_{(\infty)} = \bigcap_j MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})_{(j)}$; alors $MH(X, \mathbb{k}, n)$ est la sous-catégorie pleine de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})_{(\infty)}$ des objets (M, F, K) satisfaisant la condition :

Pour $g_1, \dots, g_r$ des fonctions holomorphes sur un ouvert U de X telles que $\bigcap_j g_j^{-1}(0) = \{x\}$, $Gr_{j_r}^W \psi_{g_r}^{\nu_r} \dots Gr_{j_1}^W \psi_{g_1}^{\nu_1}(M, F, K)$ est l'image directe d'une $\mathbb{k}$ -structure de Hodge de poids j_r pour tout $\nu \in \{0, -1\}^r$, où $\psi_{g_i}^{\nu_i} = \psi_{g_i}$ (si $\nu_i = -1$) et $\phi_{g_i,1}$ (sinon).

Ici, la filtration W de $\psi_{g_i}^{\nu_i} Gr_{j_{i-1}}^W \psi_{g_{i-1}}^{\nu_{i-1}} \dots Gr_{j_1}^W \psi_{g_1}^{\nu_1}(M, K)$ est décalée par $j_{i-1} + \nu_i$, où $j_0 = n$.

On dit que $(M, F, K) \in MH(X, \mathbb{k}, n)$ est un Module de Hodge de poids n à support strict Z , si (M, F, K) est à support strict Z , cf. 5.1.3. Soit $MH_Z(X, \mathbb{k}, n)$ la sous-catégorie pleine de tels Modules, on a alors la décomposition :

$$MH(X, \mathbb{k}, n) = \bigoplus_Z MH_Z(X, \mathbb{k}, n)$$

paramétrée par les sous-espaces analytiques fermés irréductibles, d'après 5.1.5 et par le lemme suivant :

5.1.7. Lemme. *La condition de Module de Hodge est locale, et stable par facteur direct dans $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})$.*

Preuve. On vérifie que les conditions (5.1.5.1-2) sont locales et stables par facteur direct, alors la condition de $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})_{(j)}$ est local et stable par facteur direct dans $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})$, donc l'assertion résulte du fait que les structures de

Hodge sont stables par facteur direct dans $MF_h(\mathcal{C}, \mathbf{k})$, où $\mathcal{C} = \mathcal{D}_{pt}$.

5.1.8. Lemme. Soit $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})_{(0)}$, cf. 5.1.6. Alors $(M, F, K) \in MH(X, \mathbf{k}, n)$ si la condition suivante est vérifiée:

Pour tout ouvert U de X , pour toute fonction holomorphe g sur U , et pour tout sous-espace analytique fermé irréductible Z de U tel que $g^{-1}(0) \not\supset Z$ ou $\dim Z = 0$, on a

$$Gr_i^W \psi_g(M_Z, F, K_Z), Gr_i^W \phi_{g,1}(M_Z, F, K_Z) \in MH(U, \mathbf{k}, i),$$

où (M_Z, F, K_Z) est la Z -composante de $(M, F, K)|_U$, cf. (5.1.3.5).

Preuve. Si $\text{supp } M \subset g^{-1}(0)$, on a

$$\psi_g(M, F, K) = 0, \quad \phi_{g,1}(M, F, K) = (M, F, K)$$

et l'action de N sur $\phi_{g,1}$ est nulle d'après 3.2.6; donc l'assertion résulte par récurrence sur $\dim \text{supp } M$.

5.1.9. Lemme. Soit $i: X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée, on a alors une équivalence de catégories:

$$i_*: MH_Z(X, \mathbf{k}, n) \rightarrow MH_Z(Y, \mathbf{k}, n)$$

pour Z une sous-espace analytique fermée irréductible de X ; en particulier, $MH_{[x]}(X, \mathbf{k}, n)$ est équivalente à la catégorie des $\mathbf{k}$ -structures de Hodge de poids n .

Preuve. D'après 5.1.7, on peut supposer que $\text{codim}_Y X = 1$, alors pour $(M', F, K') \in MF_h(\mathcal{D}_Y, \mathbf{k})_{(0)}$ (cf. 5.1.6), il existe $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ tel que $i_*(M, F, K) = (M', F, K')$ d'après 3.2.2. (iii) et 3.2.5, donc il suffit de vérifier que pour $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$, on a:

$$(M, F, K) \in MH_Z(X, \mathbf{k}, n) \quad \text{sii} \quad i_*(M, F, K) \in MH_Z(Y, \mathbf{k}, n).$$

Soit g une fonction holomorphe localement définie sur Y , posons

$$h = gi, \quad (\tilde{M}, F) = i_{h*}(M, F) \quad \text{et} \quad (\tilde{M}', F) = i_{g*}i_*(M, F),$$

cf. 3.2, alors $(\tilde{M}', F) = (i \times id)_*(\tilde{M}, F)$ où $i \times id: X \times \mathcal{C} \rightarrow Y \times \mathcal{C}$. Puisque pour toute h sur X , il existe (localement) g sur Y telle que $h = gi$, l'assertion résulte de 5.1.8 par récurrence sur $\dim \text{supp } M$.

5.1.10. Lemme. Soit $(M, F, K) \in MH_Z(X, \mathbf{k}, n)$, alors K est un complexe d'intersection $\mathcal{IC}_Z(L)$ et (M, F, K) est génériquement une variation de structures

de Hodge de poids $n-d_Z$, i.e. pour U un ouvert de Zariski lisse de Z sur lequel $K[-d_Z]$ est un système local L , il existe une variation de structures de Hodge $(L \otimes \mathcal{O}_U, F, L)$ de poids $n-d_Z$ telle que

$$(M, F, K)|_{X \setminus (Z \setminus U)} \simeq i_*(L \otimes \Omega_U^{d\sigma}, F, L)$$

où $i: U \rightarrow X \setminus (Z \setminus U)$. Ici la filtration F de $L \otimes \Omega_U^{d\sigma}$ est définie par $F_p(L \otimes \Omega_U^{d\sigma}) = \Omega_U^{d\sigma} \otimes_{\mathcal{O}} F^{-p-d_Z}(L \otimes \mathcal{O}_U)$.

Preuve. La première assertion résulte de 5.1.4. Pour la dernière assertion, on peut supposer que $U=X$ d'après 5.1.9. On voit que $Gr_p^F M$ sont des $\mathcal{O}_X$ -Modules localement libres de type fini et que $Gr_p^F M=0$ pour $p \gg 0$ (localement sur X), par récurrence sur d_X , en utilisant 3.2.5 et 3.2.7. En fait M est cohérent (donc libre) sur $\mathcal{O}_X$ d'après [19, Th. 10.1.1], alors la filtration V le long de $X_0=\{x_1=0\}$ est la filtration x_1 -adique, où x_1 est une coordonnée locale de X ; donc $i_*(i^*(M, F)[-1], i^*K[-1]) \simeq \psi_{x_1}(M, F, K)$ (cf. 3.5.1 et 3.5.9 pour la définition de i^*), où $i: X_0 \rightarrow X$; d'où l'assertion.

5.1.11. Corollaire. $\text{Hom}(MH_Z(X, k, n), MH_{Z'}(X, k, n'))=0$ si $Z \neq Z'$ ou $n > n'$.

(C'est clair.)

5.1.12. Lemme. Soit M un objet d'une catégorie abélienne, muni d'un endomorphisme nilpotent N . Posons $M' = \text{Coim } N$. Soient $u: M \rightarrow M'$ et $v: M' \rightarrow M$ les morphismes naturels tels que $vu=N$ et $uv=N$, soit W la filtration de M et de M' associée à N , cf. 1.3.9. Alors $uW_i \subset W_{i-1}$, $vW_i \subset W_{i-1}$ et

$$u: (M, W) \rightarrow (M', W[1]) \quad \text{et} \quad v: (M', W) \rightarrow (M, W[1])$$

sont stricts.

Preuve. D'après [7, (1.6.5)], le morphisme $N: (M, W) \rightarrow (M, W[2])$ est strict. On définit $(M', W') = \text{Coim}(N: (M, W[-1]) \rightarrow (M, W[1]))$, alors $Gr_i^{W'} M' = \text{Coim}(N: Gr_{i+1}^W M \rightarrow Gr_{i-1}^W M)$, donc W' est la filtration associée à N par la décomposition de Lefschetz de $Gr^W M$; d'où l'assertion.

5.1.13. Lemme. Soit $(M, F, K) \in MH_Z(X, k, n)$, alors $Gr^F M$ est un $Gr^F \mathcal{D}_X$ -Module de Cohen-Macaulay, i.e. $\mathcal{D}(M, F)$ est strict.

Preuve. Par récurrence sur $\dim Z$. Si $\dim Z=0$, l'assertion est claire. Supposons que $\dim Z > 0$. Pour toute fonction (locale) g telle que $\dim Z \cap g^{-1}(0) < \dim Z$, posons $(\tilde{M}, F) = i_{g*}(\tilde{M}, F)$, alors il suffit de vérifier que $Gr^F \tilde{M}_{(x,0)}$ est

de Cohen-Macaulay sur $Gr^F \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}, (x, 0)}$ pour tout $x \in g^{-1}(0)$. Soit $(L^*, F, V) \rightarrow (\tilde{M}, F, V)_{(x, 0)}$ une résolution par des modules induits libres de type fini, i.e. chaque (L^i, F, V) est une somme directe finie de $(\mathcal{D}, F[p], V[\alpha])$ avec $p \in \mathbf{Z}$, $-1 \leq \alpha \leq 0$ où $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}, (x, 0)}$. On définit $\mathbf{D}(\tilde{M}, F, V)_{(x, 0)} = \mathbf{D}(L^*, F, V)$ par :

$$\mathbf{D}(\mathcal{D}, F[p], V[\alpha]) = (\omega \otimes \mathcal{D}, F[-p], V[-1-\alpha])[d_X].$$

D'après 3.3.3-5, il suffit de vérifier que $Gr^V \mathbf{D}(L^*, F)$ est strict, que l'action de $t\partial_t - \alpha$ sur $H^i Gr^V_a \mathbf{D}(L^*)$ est nilpotente et que $H^i(F_p Gr^V_a \mathbf{D}(L^*)) = 0$ pour $i \gg 0$, car ces conditions entraînent que $\mathbf{D}(L^*, F)$ est strict. On voit que toutes les conditions ne dépendent que du complexe de $Gr^V \mathcal{D}$ -modules gradués filtrés $Gr^V \mathbf{D}(L^*, F) \cong \mathbf{D}(Gr^V(L^*, F)) (\cong \mathbf{D}(Gr^V(\tilde{M}, F)))$. D'après le lemme ci-dessus, on obtient une filtration W de $Gr^V \tilde{M}$ (par des sous- $Gr^V \mathcal{D}$ -modules gradués) telle que $Gr^W_i Gr^V(\tilde{M}, F)$ est la somme directe de :

$$Gr^W_i Gr^V_{-1}(\tilde{M}, F) \boxtimes (\mathbf{C}[t], F), \quad Gr^W_i Gr^V_0(\tilde{M}, F) \boxtimes (\mathbf{C}[\partial_t], F)$$

$$\text{et} \quad Gr^W_i Gr^V_a(\tilde{M}, F) \boxtimes (\mathbf{C}[t, \partial_t]/(t\partial_t - \alpha)\mathbf{C}[t, \partial_t], F) \quad (-1 < \alpha < 0),$$

donc l'assertion est réduite au cas où $Gr^V(\tilde{M}, F)$ est isomorphe à un de tels modules. Puisque la résolution et le dual sont compatibles avec le produit $\boxtimes$, il suffit de vérifier les conditions pour $Gr^V(\tilde{M}, F) = (\mathbf{C}[t], F)$, etc., car $\mathbf{D}(Gr^W_i Gr^V_a(\tilde{M}, F))$ sont stricts par hypothèse de récurrence. Alors l'assertion est claire.

5.1.14. Proposition. Soit $MF_k W(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ la catégorie des objets de $MF_k(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ munis d'une filtration croissante localement finie W (cf. 1.3.1), i.e. les objets de $MF_k W(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ sont des couples $((M, F, W), (K, W))$ munis d'un isomorphisme :

$$\alpha: DR(M) \simeq \mathbf{C} \otimes K \text{ tel que } \alpha: DR(W_i M) \simeq \mathbf{C} \otimes W_i K.$$

Soit $MHW(X, \mathbf{k})$ la sous-catégorie pleine de $MF_k W(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ des objets satisfaisant la condition: $Gr^W_i \in MH(X, \mathbf{k}, i)$ pour tout i . Alors $MH_Z(X, \mathbf{k}, n)$, $MH(X, \mathbf{k}, n)$ et $MHW(X, \mathbf{k})$ sont des catégories abéliennes dont les morphismes sont toujours stricts pour F ou pour (F, W) .

Preuve. L'assertion pour $MH(X, \mathbf{k}, n)$ est réduite à celle pour $MH_Z(X, \mathbf{k}, n)$ d'après 5.1.11. Considérons les assertions :

a(i): $MH_Z(X, \mathbf{k}, n)$ est une catégorie abélienne dont les morphismes sont stricts, si $\dim Z \leq i$.

b(i): $MHW(X, \mathbf{k})^i$ est une catégorie abélienne dont les morphismes sont stricts.

où $MHW(X, k)^i$ est la sous-catégorie pleine de $MHW(X, k)$ des objets dont la dimension du support est $\leq i$. Alors l'assertion $a(0)$ est claire, et l'implication $a(i) \Rightarrow b(i)$ résulte de 1.2.10, 5.1.11 et du lemme 5.1.15 ci-dessous, où on prend $MG_k(\mathcal{B}_X, k)$ (cf. 5.1.1) pour $\mathcal{A}$. Prouvons $b(i) \Rightarrow a(i+1)$.

Soit $u: (M, F, K) \rightarrow (M', F, K')$ un morphisme de $MH_Z(X, k, n)$, alors il faut montrer que F est strict et que $\text{Ker } u, \text{Coker } u \in MH_Z(X, k, n)$. D'après 3.3.3–5, 3.2.6, 3.1.6 et 5.1.8, il suffit de vérifier que pour toute fonction g (localement définie) telle que $\dim g^{-1}(0) \cap Z \leq i$,

$$\psi_g u: (\psi_g(M, F, K), W) \rightarrow (\psi_g(M', F, K'), W)$$

est strict (de même pour $\phi_{g,1}$) et

$$\begin{aligned} \text{can}: \text{Ker } \psi_{g,1} u &\rightarrow \text{Ker } \phi_{g,1} u \\ (\text{resp. Var}: \text{Ker } \phi_{g,1} u &\rightarrow \text{Ker } \psi_{g,1} u(-1)) \end{aligned}$$

est surjectif (resp. injectif) (de même pour Coker), car on peut remplacer (M, F, K) par la Z' -composante (cf. 5.1.3.5) de $(M, F, K)|_U$ dans 5.1.8, où Z' est une composante de $Z \cap U$. Mais la première résulte de $b(i)$ et la dernière de la décomposition de Lefschetz (par le passage à Gr^W); d'où l'assertion.

5.1.15. Lemme. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, soient $\mathcal{A}_j$ des sous-catégories additives pleines strictes de $\mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{Z}$), soit $\mathcal{A}W$ la catégorie des objets de $\mathcal{A}$ munis d'une filtration finie croissante W telle que $Gr_j^W \in \mathcal{A}_j$ pour tout j . Supposons que chaque $\mathcal{A}_j$ soit stable par Ker et Coker dans $\mathcal{A}$ (en particulier, $\mathcal{A}_j$ est abélienne), et que $\text{Hom}(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_k) = 0$ pour $j > k$, alors $\mathcal{A}W$ est une catégorie abélienne dont les morphismes sont toujours stricts pour W .

Preuve. Soit $u: (E, W) \rightarrow (E', W)$ un morphisme de $\mathcal{A}W$. Si u est strict, Ker et Coker commutent à Gr_j^W , donc $\text{Ker } u, \text{Coker } u \in \mathcal{A}W$ par hypothèse. Pour démontrer que u est strict, on considère un diagramme dans $\mathcal{A}W$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & W_{j-1}(E, W) & \rightarrow & W_j(E, W) & \rightarrow & Gr_j^W(E, W) \rightarrow 0 \\ & & u \downarrow & & u \downarrow & & u \downarrow \\ 0 & \rightarrow & W_{j-1}(E', W) & \rightarrow & W_j(E', W) & \rightarrow & Gr_j^W(E', W) \rightarrow 0, \end{array}$$

et on procède par récurrence d'après le lemme suivant:

5.1.16. Lemme. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte, soit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E' & \rightarrow & E & \rightarrow & E'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow u' & & \downarrow u & & \downarrow u'' \\ 0 & \rightarrow & F' & \rightarrow & F & \rightarrow & F'' \rightarrow 0 \end{array}$$

un morphisme entre des suites exactes courtes dans $\mathcal{C}$. Si u' et u'' sont stricts, et si $\text{Hom}(\text{Ker } u'', \text{Coker } u') = 0$, alors u est aussi strict.

Preuve. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ comme dans 1.3.2, on a alors une suite exacte courte dans $\tilde{\mathcal{C}}$:

$$0 \rightarrow \text{Ker } u' \rightarrow \text{Ker } u \rightarrow \text{Ker } u'' \rightarrow 0$$

(de même pour Coker et Im) par le lemme du serpent; d'où $\text{Ker } u$, $\text{Coker } u$, $\text{Im } u \in \mathcal{C}$, i.e. u est strict. Ce qui achève la preuve de 5.1.15 et de 5.1.14.

5.1.17. Lemme. Soient $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ et g une fonction holomorphe sur X . Supposons que (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de g et que

$$\text{can}: \psi_{g,1} \rightarrow \phi_{g,1} \quad (\text{resp. } \text{Var}: \phi_{g,1} \rightarrow \psi_{g,1}(-1))$$

soit surjectif (resp. injectif), i.e. (M, F) , K et (M, F, K) n'ont ni de sous-objets, ni d'objets quotients, à supports dans $g^{-1}(0)$, cf. 5.1.4. Soit W la filtration de $\psi_{g,1}$ et de $\phi_{g,1}$ comme dans 5.1.6. Si $(\psi_{g,1}(M, F, K), W) \in MHW(X, \mathbf{k})$, les conditions suivantes sont équivalentes:

$$(5.1.17.1) \quad \text{can}: \psi_{g,1} \rightarrow \phi_{g,1} \text{ est strict dans } MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k}),$$

$$(5.1.17.2) \quad \text{Var}: \phi_{g,1} \rightarrow \psi_{g,1}(-1) \text{ est strict dans } MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k}),$$

$$(5.1.17.3) \quad \text{can}: (\psi_{g,1}, W) \rightarrow (\phi_{g,1}, W) \text{ est strict dans } MF_h W(\mathcal{D}_X, \mathbf{k}),$$

$$(5.1.17.4) \quad \text{Var}: (\phi_{g,1}, W) \rightarrow (\psi_{g,1}, W)(-1) \text{ est strict dans } MF_h W(\mathcal{D}_X, \mathbf{k}),$$

$$(5.1.17.5) \quad (\phi_{g,1}(M, F, K), W) \in MHW(X, \mathbf{k}),$$

où $(\psi_{g,1}, W)(-1) = (\psi_{g,1}(-1), W[2])$. Si ces conditions sont vérifiées, on a les isomorphismes:

$$(5.1.17.6) \quad \text{can}: P_N Gr_i^W \psi_{g,1} \xrightarrow{\sim} P_N Gr_i^W \phi_{g,1} \text{ pour } i \geq n,$$

où $P_N Gr_{n-1+i}^W \psi_{g,1} = \text{Ker } N^{i+1} \subset Gr_{n-1+i}^W \psi_{g,1}$ (de même pour $\phi_{g,1}$ en remplaçant $n-1$ par n).

Preuve. D'abord notons que 5.1.12 entraîne que les morphismes en (5.1.17.3–4) sont bien-définis. D'après 5.1.14, les implications: (5.1.17.5) $\Rightarrow$ (5.1.17.3) $\Rightarrow$ (5.1.17.1) et (5.1.17.5) $\Rightarrow$ (5.1.17.4) $\Rightarrow$ (5.1.17.2) sont claires, donc il suffit de vérifier: (5.1.17.1) (ou (5.1.17.2)) $\Rightarrow$ (5.1.17.5). Si (5.1.17.1) ou (5.1.17.2) est vérifiée, on a l'isomorphisme:

$$(5.1.17.7) \quad \text{Coim } N \simeq (\phi_{g,1}, W) \text{ dans } MF_h W(\mathcal{D}_X, \mathbf{k}),$$

par la factorisation $N = \text{Var} \circ \text{can}$. En fait (5.1.17.7) résulte de 5.1.12, si on oublie la filtration F , et l'assertion pour F résulte du fait que $N: \psi_{g,1} \rightarrow \psi_{g,1}(-1)$ est strict pour F d'après 5.1.14. Alors (5.1.17.5) résulte de (5.1.17.7) et de 5.1.14. Dans ce cas, on a $Gr^W \phi_{g,1} = \text{Coim } Gr^W N$; d'où (5.1.17.6) par la décomposition de Lefschetz.

5.1.18. Remarque. Soit $(M, F, K) \in MH(X, k, n)$, soit f un morphisme d'un disque D dans X ; alors on peut vérifier, par récurrence sur $\dim \text{supp } M$, que $\mathcal{H}^i f^! M$ sont des $\mathcal{D}$ -Modules holonomes réguliers, quasi-unipotents, i.e. M est régulier, et quasi-unipotent (au sens de Kashiwara.)

5.2. Polarisation

5.2.1. Soit X une variété complexe lisse, soit $p: X \rightarrow D$ un morphisme lisse dans un disque D , posons

$$\begin{aligned} i: X_0 = p^{-1}(0) &\rightarrow X, \quad j: X^* = X \setminus X_0 \rightarrow X, \\ \tilde{j}: \tilde{X}^* = X \times_D \tilde{D}^* &\rightarrow X, \end{aligned}$$

où $\tilde{D}^* \rightarrow D^* = D \setminus \{0\}$ est un revêtement universel. Soit K un objet de $D_c^b(k_X)$ représenté par un complexe dont les composantes sont flasques (i.e. injectives sur k_X). On définit

$$\begin{aligned} (5.2.1.1) \quad \psi K &= i^* \tilde{j}_* \tilde{j}^* K, \quad {}^p\psi K = \psi K[-1], \\ {}^p\phi_1 K &= C(\text{sp}: i^* K[-1] \rightarrow {}^p\psi_1 K) \in D_c^b(k_{X_0}). \end{aligned}$$

Ici, ${}^p\psi_1 K = \bigcup_i \text{Ker}(T - \text{id})^i \subset {}^p\psi K$ comme dans 3.4.14, et sp est un élément de $\text{Ext}^1(i^* K, {}^p\psi_1 K)$ représenté par le morphisme naturel: $i^* K \rightarrow {}^p\psi_1 K[1] \subset i^* \tilde{j}_* \tilde{j}^* K$. On a alors un triangle dans $D_c^b(k_{X_0})$

$$(5.2.1.2) \quad \rightarrow {}^p\psi_1 K \xrightarrow{\text{can}} {}^p\phi_1 K \rightarrow i^* K \xrightarrow{+1}.$$

Puisque $0 \rightarrow i^* j_* j^* K \rightarrow \psi_1 K \xrightarrow{N} \psi_1 K(-1) \rightarrow 0$ est exacte dans la catégorie de complexes, on a un quasi-isomorphisme:

$$(5.2.1.3) \quad i^! K \xrightarrow{\sim} [i^* K \xrightarrow{\text{sp}} \psi_1 K \xrightarrow{-N} \psi_1 K(-1)]$$

où le terme à droite est le complexe simple associé au complexe double tel que $i^* K$ est de degré 0. Désormais $i^! K$ sera représenté par le but du morphisme (5.2.1.3), alors le morphisme naturel: $i^! K \rightarrow i^* K$ s'identifie à la projection $(\text{id}, 0, 0)$. On définit $\text{cosp} \in \text{Ext}^1({}^p\psi_1 K(-1), i^! K)$ par le morphisme naturel:

$${}^p\psi_1 K(-1)[-1] = \psi_1 K(-1)[-2] \xrightarrow{(0, 0, \text{id})} [i^* K \rightarrow \psi_1 K \rightarrow \psi_1 K(-1)],$$

on a alors un quasi-isomorphisme naturel:

$$C(\text{cosp}: {}^p\psi_1 K(-1)[-1] \rightarrow i^! K) \rightarrow {}^p\phi_1 K,$$

donc on obtient le triangle dans $D_c^b(\mathbf{k}_{X_0})$:

$$(5.2.1.4) \quad \rightarrow i^! K \rightarrow {}^p\phi_1 K \xrightarrow{\text{Var}} {}^p\psi_1 K(-1) \xrightarrow{+1}.$$

Notons que le morphisme Var dans (5.2.1.4) coïncide (dans $D_c^b(\mathbf{k}_{X_0})$) avec le morphisme:

$$(0, N): {}^p\phi_1 K = [i^* K \xrightarrow{\text{sp}} \psi_1 K] \rightarrow \psi_1 K[-1] = {}^p\psi_1 K,$$

défini comme dans 3.4, et que la composition $i^! K \rightarrow {}^p\phi_1 K \rightarrow i^* K$ des morphismes dans (5.2.1.2) et (5.2.1.4) est le morphisme naturel: $i^! K \rightarrow i^* K$.

5.2.2. Remarque. Avec les notations ci-dessus, les triangles (5.2.1.2), (5.2.1.4) (et les remarques ci-dessus) se déduisent un diagramme de l'octaèdre (cf. [1, (1.1.6)]):

$$\begin{array}{ccc} i^* K & \xleftarrow{\quad} & i^! K \\ \downarrow +1 & \swarrow c & \nearrow d \\ {}^p\psi_1 K & \xrightarrow{\quad} & {}^p\psi_1 K(-1) \\ \uparrow c & \nwarrow d & \downarrow +1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} i^* K & \xleftarrow{\quad} & i^! K \\ \downarrow +1 & \swarrow c & \nearrow d+1 \\ {}^p\psi_1 K & \xrightarrow{\quad} & {}^p\psi_1 K(-1) \\ \uparrow +1 & \nwarrow d & \downarrow c \end{array}$$

(calotte supérieure) (calotte inférieure)

où d signifie “distingué” et c “commutatif”. Alors les (deux) suites longues associées au pourtour de ces deux carrés:

$$(5.2.2.2) \quad \rightarrow {}^p\mathcal{H}^i({}^p\psi_1 K) \xrightarrow{N} {}^p\mathcal{H}^i({}^p\psi_1 K(-1)) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^{i+1}(i^! K) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^{i+1}(i^* K) \rightarrow$$

sont dites la suite longue de Clemens-Schmid [5]. (Notons que la calotte inférieure (resp. supérieure) est utilisée par Clemens-Schmid (resp. Zucker) dans le cas $K=f_*\mathbf{C}_Y$ pour $f: Y \rightarrow D$ un morphisme propre de Kähler, et que les foncteurs ${}^p\psi_1$, i^* , etc. commutent au foncteur image directe propre.) D’après Zucker (5.2.2.2) sont exactes sii:

$$(5.2.2.3) \quad {}^p\mathcal{H}^i({}^p\phi_1 K) = \text{Im}(\text{can}: {}^p\mathcal{H}^i({}^p\psi_1 K) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^i({}^p\phi_1 K)) \\ \oplus \text{Ker}(\text{Var}: {}^p\mathcal{H}^i({}^p\phi_1 K) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^i({}^p\psi_1 K(-1))) \quad \text{pour tout } i,$$

(comparer à la condition (5.1.4.2).) Cette condition est vérifiée si K est une

somme directe de faisceaux pervers K' (décalés) tels qu'il n'y a pas de sous-objets (ni d'objets quotients) de K' à supports dans X_0 (i.e. can est surjectif et Var est injectif), ou que $\text{supp } K' \subset X_0$ (car ${}^p\psi_1$ et ${}^p\phi_1$ commutent à ${}^p\mathcal{H}^i$). Dans ce cas, (5.2.2.2) est une somme directe de suites exactes :

$$0 \rightarrow \text{Ker } N \rightarrow {}^p\psi_1 K' \xrightarrow{N} {}^p\psi_1 K'(-1) \rightarrow \text{Coker } N \rightarrow 0$$

ou

$$0 \rightarrow i^! K' \xrightarrow{\sim} i^* K' \rightarrow 0.$$

Par exemple, on a

$$f_* \mathcal{C}_Y = \bigoplus_k (j_* j^* \mathcal{H}^k f_* \mathcal{C}_Y)[-k] \oplus \bigoplus_k i_* \text{Ker } (H^k(Y_0) \rightarrow H^k(Y_t))[-k]$$

pour $f: Y \rightarrow D$ comme ci-dessus, où f est lisse sur D^* et $t \in D^*$; alors ${}^p\psi_1 K' = H^k(Y_t)$ ou $i^* K' = \text{Ker } (H^k(Y_0) \rightarrow H^k(Y_t))$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

5.2.3. Avec les notations de 5.2.1, soient $K, L \in D_c^b(\mathbb{k}_X)$ et $S: K \otimes L \rightarrow a_X^! \mathbb{k}(r)$ un accouplement, où $a_X: X \rightarrow pt$. Ici on suppose que K, L et $a_X^! \mathbb{k}(r)$ ($\cong \mathbb{k}_X(r+d_X)$ [$2d_X$]) sont représentés par des complexes dont les composantes sont flasques. On dit que S est non-dégénéré si le morphisme correspondant: $K \rightarrow \mathcal{D}(L)$ est un quasi-isomorphisme. On définit

$$\begin{aligned} \psi S: \psi K \otimes \psi L &\rightarrow \psi a_X^! \mathbb{k}(r) (\cong a_{X_0}^! \mathbb{k}(r+1)[2]) \\ \text{par } i^* \tilde{j}_* \tilde{j}^* K \otimes i^* \tilde{j}_* \tilde{j}^* L &\rightarrow i^* \tilde{j}_* (\tilde{j}^* K \otimes \tilde{j}^* L) \rightarrow i^* \tilde{j}_* \tilde{j}^* a_X^! \mathbb{k}(r), \text{ et} \\ {}^p\psi S: {}^p\psi K \otimes {}^p\psi L &\rightarrow \psi a_X^! \mathbb{k}(r)[-2] (\cong a_{X_0}^! \mathbb{k}(r+1)) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \psi K \otimes \psi L &= (\mathbb{k}[1] \otimes {}^p\psi K) \otimes (\mathbb{k}[1] \otimes {}^p\psi L) \\ &\cong (\mathbb{k}[1] \otimes \mathbb{k}[1]) \otimes ({}^p\psi K \otimes {}^p\psi L) \xrightarrow{{}^p\psi S} \psi a_X^! \mathbb{k}(r) \end{aligned}$$

coïncide avec ψS , où le deuxième isomorphisme est définie par

$$x \otimes y \otimes z \otimes w \rightarrow (-1)^{\deg y \cdot \deg z} x \otimes z \otimes y \otimes w, \quad \text{cf. [9].}$$

Alors ψS induit $\psi_1 S: \psi_1 K \otimes \psi_1 L \rightarrow \psi_1 a_X^! \mathbb{k}(r) (\cong a_{X_0}^! \mathbb{k}(r+1)[2])$ (de même pour ${}^p\psi_1 S$). On définit

$$i^! S: i^* K \otimes i^! L \rightarrow i^! a_X^! \mathbb{k}(r) (\cong a_{X_0}^! \mathbb{k}(r))$$

par

$$\begin{aligned} i^* K \otimes [i^* L \rightarrow \psi_1 L \rightarrow \psi_1 L(-1)] &\rightarrow [i^*(K \otimes L) \rightarrow \psi_1(K \otimes L) \rightarrow \psi_1(K \otimes L)(-1)] \\ \xrightarrow{(i^* S, \psi S, \psi S)} [i^* a_X^! \mathbb{k}(r) \rightarrow \psi_1 a_X^! \mathbb{k}(r) \rightarrow \psi_1 a_X^! \mathbb{k}(r-1)] &(\cong i^! a_X^! \mathbb{k}(r)) \end{aligned}$$

où on utilise l'isomorphisme (5.2.1.3). Notons que le morphisme

$$(5.2.3.1) \quad (0, 0, id): \psi_1 a_X^! \mathbf{k}(r-1)[-2] \rightarrow [i^* a_X^! \mathbf{k}(r) \rightarrow \psi_1 a_X^! \mathbf{k}(r) \rightarrow \psi_1 a_X^! \mathbf{k}(r-1)]$$

s'identifie à l'identité par les isomorphismes canoniques:

$$\psi_1 a_X^! \mathbf{k}(r-1)[-2] \cong a_{X_0}^! \mathbf{k}(r) \quad \text{et} \quad i^! a_X^! \mathbf{k}(r) \cong a_{X_0}^! \mathbf{k}(r).$$

Alors on vérifie que les morphismes $\psi_1 S(\mathrm{sp} \otimes id)$ et $i^! S(id \otimes \mathrm{cosp})$ de $i^* K \otimes \psi_1 L(-1)[-2]$ dans le but du morphisme (5.2.3.1) coïncident, où le décalage $[-2]$ n'intervient pas au signe. D'après le lemme suivant on obtient l'accouplement

$${}^p\phi_1 S: {}^p\phi_1 K \otimes {}^p\phi_1 L \rightarrow a_{X_0}^! \mathbf{k}(r)$$

compatible avec ${}^p\psi_1 S$ et $i^! S$, i.e. l'accouplement des triangles (5.2.1.2) pour K et (5.2.1.4) pour L .

5.2.4. Lemme. Soient $u: B[-1] \rightarrow A$ (resp. $u': A'[-1] \rightarrow B'$) un morphisme de complexes, et C (resp. C') le cône de u (resp. u'). Soient $S_A: A \otimes A' \rightarrow D$ et $S_B: B \otimes B' \rightarrow D$ des morphismes de complexes. On définit S'_A par la composition:

$$\begin{aligned} A[1] \otimes A'[-1] &= \mathbf{Z}[1] \otimes A \otimes \mathbf{Z}[-1] \otimes A' \cong \mathbf{Z}[1] \otimes \mathbf{Z}[-1] \otimes A \otimes A' \\ &= A \otimes A' \xrightarrow{S_A} D. \end{aligned}$$

Si $S'_A(u \otimes id) = S_B(id \otimes u'): B \otimes A'[-1] \rightarrow D$, $S_A \oplus S_B$ définit un accouplement $S_C: C \otimes C' \rightarrow D$ tel qu'on ait un accouplement des triangles: $\rightarrow A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} B \rightarrow$ et $\rightarrow B' \xrightarrow{i'} C' \xrightarrow{p'} A' \rightarrow$, i.e.

$$S_C(i \otimes id) = S_A(id \otimes p'); \quad A \otimes C' \rightarrow D, \quad S_C(id \otimes i') = S_B(p \otimes id): C \otimes B' \rightarrow D.$$

Preuve. Soient $(a, b) \in C^i = A^i \oplus B^i$, $(a', b') \in C'^j = A'^j \oplus B'^j$, alors $S_C((a, b), (a', b')) = S_A(a, a') + S_B(b, b')$ par définition. On vérifie que S_C est un morphisme de complexes ssi $S_A(ub, a') + (-1)^i S_B(b, u'a') = 0$; mais $S'_A(ub, a') = (-1)^{i+1} S_A(ub, a')$ car $ub \in A^{i+1}$; d'où l'assertion.

5.2.5. Lemme. Avec les notations 5.2.3, soient T la monodromie, $T = T_s T_u$ la décomposition de Jordan et $N = (\log T_u)/2\pi i$ sur $\psi K (\cong \bigoplus_p (\psi K))$ et $\phi_1 K$ (de même pour L), cf. 3.4.14. On a alors

$${}^p\psi S \circ (N \otimes id) + {}^p\psi S \circ (id \otimes N) = 0$$

(de même pour ${}^p\phi_1$) dans $D_c^b(\mathbf{k}_{X_0})$.

Preuve. Cela résulte du diagramme commutatif dans $D_c^b(\mathbf{k}_{X_0})$ suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 \psi K \otimes \psi L & \xrightarrow{\psi S} & \psi a_X^! k(r) \simeq i^* a_X^! k(r) \\
 \downarrow T \otimes T & & \downarrow T \quad \parallel id \\
 \psi K \otimes \psi L & \xrightarrow{\psi S} & \psi a_X^! k(r) \simeq i^* a_X^! k(r).
 \end{array}$$

5.2.6. Corollaire. Avec les notations ci-dessus, supposons que K et L soient des faisceaux pervers. Soit W la filtration de ${}^p\psi K$, ${}^p\phi_1 K$, etc. associée à N décalée par 0, alors la composition:

$$W_i {}^p\psi K \otimes W_j {}^p\psi L \rightarrow {}^p\psi K \otimes {}^p\psi L \rightarrow a_{X_0}^! k(r+1)$$

est nulle dans $D_c^b(k_{X_0})$ pour $i+j < 0$ (de même pour ϕ_1), donc on a des accouplements:

$$\begin{aligned}
 Gr_i^W \psi S: Gr_i^W {}^p\psi K \otimes Gr_{-i}^W {}^p\psi L &\rightarrow a_{X_0}^! k(r+1) \\
 Gr_i^W \phi_1 S: Gr_i^W {}^p\phi_1 K \otimes Gr_{-i}^W {}^p\phi_1 L &\rightarrow a_{X_0}^! k(r).
 \end{aligned}$$

Preuve. L'accouplement ${}^p\psi S: {}^p\psi K \otimes {}^p\psi L \rightarrow a_{X_0}^! k(r+1)$ correspond à un morphisme dans $\text{Perv}(k_{X_0})$:

$${}^p\psi K \rightarrow \mathbf{D}^p \psi L(r+1).$$

Si on définit l'action de N sur $\mathbf{D}^p \psi L$ par $-N^*$, ce morphisme est N -linéaire d'après 5.2.5. Puisque la filtration associée (décalée par 0) est auto-duale, l'assertion résulte de 1.3.9–10.

5.2.7. Lemme. Soient K , L et S comme dans 5.2.3. Soit ${}^p\mathcal{H}^j$ ($j \in \mathbb{Z}$) le foncteur cohomologique pervers [1], alors S induit canoniquement:

$${}^p\mathcal{H}S: {}^p\mathcal{H}^{-j}K \otimes {}^p\mathcal{H}^jL \rightarrow a_X^! k(r).$$

On a de plus ${}^p\mathcal{H}^p \psi S = {}^p\psi {}^p\mathcal{H}S$ par les isomorphismes canoniques:

$${}^p\mathcal{H}^i {}^p\psi K \simeq {}^p\psi {}^p\mathcal{H}^i K, \text{ etc. (de même pour } \phi_1)$$

Preuve. Cela résulte du fait que ${}^p\psi$, ${}^p\phi_1$ sont des foncteurs t -exacts et que ${}^p\mathcal{H}S$ est uniquement déterminé par le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 {}^p\tau_{\leq -j}K \otimes {}^p\tau_{\leq j}L & \rightarrow & {}^p\mathcal{H}^{-j}K \otimes {}^p\mathcal{H}^jL \\
 \downarrow & & \downarrow {}^p\mathcal{H}S \\
 K \otimes L & \xrightarrow{S} & a_X^! k(r).
 \end{array}$$

5.2.8. Lemme. Avec les notations de 5.2.3, supposons que $\text{supp } K$, $\text{supp } L \subset X_0$, alors $S: K \otimes L \rightarrow a_X^! k(r)$ se factorise canoniquement par

$$S': K \otimes L \rightarrow \Gamma_{X_0} a_X^! k(r) \quad (= i_{*} i^! a_X^! k(r))$$

qui s'identifie à l'image directe (par i_*) de

$$i^!S: i^*K \otimes i^!L \rightarrow i^!a_X^!k(r)$$

par l'isomorphisme canonique: $i_*i^!L \xrightarrow{\sim} L$, donc ${}^p\phi_1S$ s'identifie canoniquement à S , cf. 5.2.3-4.

Preuve. D'abord notons que $a_X^!k(r)$ est représenté par un complexe de faisceaux flasques; d'où la première assertion. Les autres résultent de la définition de $i^!S$, de l'isomorphisme (5.2.1.3) pour L et pour $a_X^!k(r)$, et de 5.2.4.

5.2.9. Lemme. Avec les notations de 5.2.1 et 5.2.3, soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre de variétés complexes lisses, qui factorise $p: X \rightarrow D$, i.e. $p=qf$ avec $q: Y \rightarrow D$ lisse. Soit $Tr: a_X^!k \rightarrow a_Y^!k$ le morphisme de trace. Pour simplifier la notation, f (resp. i) notera encore $f: X_0 \rightarrow Y_0$ (resp. $Y_0 \hookrightarrow Y$). On a alors les isomorphismes canoniques:

$$i^*f_*K \cong f_*i^*K, {}^p\psi_{(1)}f_*K \cong f_*{}^p\psi_{(1)}K, i^!f_*K \cong f_*i^!K, {}^p\phi_1f_*K \cong f_*{}^p\phi_1K$$

(de même pour L et $a_X^!k$) et les images directes des accouplements:

$$\begin{aligned} f_*{}^p\psi_{(1)}S: f_*{}^p\psi_{(1)}K \otimes f_*{}^p\psi_{(1)}L &\rightarrow i^!a_Y^!k(r+1), \\ f_*i^!S: f_*i^*K \otimes f_*i^!L &\rightarrow i^!a_Y^!k(r) \quad (\text{de même pour } f_*{}^p\phi_1S) \end{aligned}$$

qui s'identifient respectivement à ${}^p\psi_{(1)}f_*S$, $i^!f_*S$ (et ${}^p\phi_1f_*S$), où f_*S est définie par la composition:

$$f_*K \otimes f_*L \rightarrow f_*(K \otimes L) \xrightarrow{S} f_*a_X^!k(r) \xrightarrow{Tr} a_Y^!k(r).$$

Preuve. Puisque f est propre, on a la première assertion, où le foncteur $i^!$ est représenté toujours par $[i^* \rightarrow \psi_1 \rightarrow \psi_1(-1)]$, cf. (5.2.1.3). (Ici tous les complexes $K, L, a_X^!k$ et $a_Y^!k$ sont représentés par des complexes de faisceaux flasques.) Puisque

$$\psi_{(1)}Tr: \psi_{(1)}f_*a_X^!k(-1)[-2] \rightarrow \psi_{(1)}a_Y^!k(-1)[-2] \quad \text{et} \quad i^!Tr: i^!f_*a_X^!k \rightarrow i^!a_Y^!k$$

représentent le morphisme trace: $f_*a_X^!k \rightarrow a_Y^!k$ par les isomorphismes dans la première assertion et par l'identification (5.2.3.1), on obtient les images directes de ${}^p\psi_{(1)}S$, $i^!S$ et de ${}^p\phi_1S$; alors la dernière assertion est claire par la définition de ces images directes.

5.2.10. Soient $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, k)_{(0)}$, cf. 5.1.6, et $(M, F, K) = \bigoplus (M_Z, F, K_Z)$ la décomposition par supports stricts, cf. (5.1.3.5). Soit $S: K \otimes K \rightarrow a_X^!k(r)$ un accouplement, alors S est compatible avec cette décomposition, i.e. $S = \bigoplus S_Z$

dans $D_c^b(\mathbb{k}_X)$, où $S_Z: K_Z \otimes K_Z \rightarrow a_X^! \mathbb{k}(r)$ (dit la Z -composante de S), car $\text{Hom}(K_Z, K_{Z'}) = 0$ pour $Z \neq Z'$. On dit que S est *compatible avec la filtration* F , s'il existe un (unique) morphisme:

$$(M, F, K) \rightarrow \mathcal{D}(M, F, K)(r)$$

dont la deuxième composante: $K \rightarrow \mathcal{D}K(r)$ correspond à S par l'isomorphisme canonique:

$$\text{Hom}(K \otimes K, a_X^! \mathbb{k}(r)) = \text{Hom}(K, \mathcal{H}om(K, a_X^! \mathbb{k}(r))).$$

Soit $(M, F, K) \in MH(X, \mathbb{k}, n)$. On dit que (M, F, K) est *polarisable*, s'il existe un accouplement $S: K \otimes K \rightarrow a_X^! \mathbb{k}(-n)$ compatible avec la filtration F , dit une *polarisation* de (M, F, K) , qui satisfait les conditions suivantes (définies par récurrence sur $\dim \text{supp } M$):

Pour tous U, g et Z dans 5.1.8, soit (M_Z, F, K_Z) la Z -composante de $(M, F, K)|_U$, cf. (5.1.3.5), on a alors:

(5.2.10.1) Si $Z = \{x\}$ (donc $(M_Z, F, K_Z) = i_{x*}(H_C, F, H_k)$ d'après (5.1.6.1)), il existe une polarisation S' de (H_C, F, H_k) au sens de [6] (i.e. $S'(x, C\bar{x}) \geq 0$) telle que $S = i_{x*} S'$, cf. 5.2.9.

(5.2.10.2) Si $\dim Z > 0$ (donc $g^{-1}(0) \not\supset Z$, cf. 5.1.8), $Gr^W \psi_g S_Z \circ (id \otimes N^i): P_N Gr_{n-1+i}^W \psi_g K_Z \otimes P_N Gr_{n-1+i}^W \psi_g K_Z \rightarrow a_U^! \mathbb{k}(1-n-i)$ (cf. 5.2.6) est une polarisation de la partie primitive $P_N Gr_{n-1+i}^W \psi_g (M_Z, F, K_Z)$, cf. (5.1.17.6), pour $i \geq 0$, où $S_Z: K_Z \otimes K_Z \rightarrow a_U^! \mathbb{k}(-n)$ s'identifie à $i_{g*} S_Z: i_{g*} K_Z \otimes i_{g*} K_Z \rightarrow a_{U \times C}^! \mathbb{k}(-n)$ pour la définition de $\psi_g S_Z$, cf. 5.2.3.

D'après 5.2.4, on a $\psi_{g,1}(\text{can} \otimes id) = \psi_{g,1}(id \otimes \text{Var})$, donc (5.2.10.2) et (5.1.17.6) entraînent:

(5.2.10.3) $Gr^W \psi_{g,1} S_Z \circ (id \otimes N^i): P_N Gr_{n+i}^W \psi_{g,1} K_Z \otimes P_N Gr_{n+i}^W \psi_{g,1} K_Z \rightarrow a_U^! \mathbb{k}(-n-i)$ est une polarisation de $P_N Gr_{n+i}^W \psi_{g,1} (M_Z, F, K_Z)$ pour $i \geq 0$.

Dans le cas $g^{-1}(0) \supset Z$, $\psi_{g,1} S_Z$ s'identifie canoniquement à S_Z d'après 3.2.6, 5.2.8, (car $S: K_Z \otimes K_Z \rightarrow a_U^! \mathbb{k}(-n)$ se factorise par $a_Z^! \mathbb{k}(-n) \rightarrow a_U^! \mathbb{k}(-n)$ canoniquement) donc (5.2.10.3) reste valable (car $N=0$).

5.2.11. Lemme. Avec les notations de 5.1.9, S est une polarisation de $(M, F, K) \in MH_Z(X, \mathbb{k}, n)$ ssi $i_* S$ est une polarisation de $i_*(M, F, K)$.

(C'est clair.)

5.2.12. Lemme. Avec les notations et les hypothèses de 5.1.10, soit S une polarisation de $(M, F, K) \in MH_Z(X, \mathbb{k}, n)$. Alors S est $(-1)^n$ -symé-

trique (i.e. $S \circ \iota = (-1)^n S$, où $\iota: K \otimes K \rightarrow K \otimes K$ est défini par $\iota(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \cdot \deg y} (y \otimes x)$, cf. [11]), et il existe une polarisation $S': L \otimes L \rightarrow \mathbf{k}_U(d_Z - n)$

de la variation de structures de Hodge, telle que $S|_{X \setminus (Z \cup V)} = i_* S''$, où

$$S'': L[d_Z] \otimes L[d_Z] \rightarrow \mathbf{k}_U(d_Z - n)[2d_Z] \quad (\simeq a_U^! \mathbf{k}(-n))$$

est défini par $(-1)^{d_Z(d_Z-1)/2} S'$ sur $L \otimes L = (L[d_Z] \otimes L[d_Z])^{-2d_Z}$.

Preuve. On peut supposer que $U = X$ (donc $K = L[d_X]$), alors la première assertion résulte de la dernière, car S' est $(-1)^{n-d_X}$ -symétrique. Soient x_1 et $i: X_0 \rightarrow X$ comme dans la preuve de 5.1.10, alors

$$\psi_{x_1} S: i^* L \otimes i^* L (= (\psi_{x_1} K \otimes \psi_{x_1} K)^{-2d_X}) \rightarrow \mathbf{k}_{X_0}(d_X - n)$$

et

$${}^p \psi_{x_1} S: i^* L \otimes i^* L (= ({}^p \psi_{x_1} K \otimes {}^p \psi_{x_1} K)^{2-2d_X}) \rightarrow \mathbf{k}_{X_0}(d_{X_0} + 1 - n)$$

coïncident au signe $(-1)^{d_X-1}$ près; d'où l'assertion par récurrence (car $i^* S = \psi_{x_1} S$).

5.2.13. Corollaire. Soit $MH_Z(X, \mathbf{k}, n)^p$ la sous-catégorie pleine de $MH_Z \times (X, \mathbf{k}, n)$ des objets polarisables, alors $MH_Z(X, \mathbf{k}, n)^p$ est semi-simple.

(Cela résulte de 3.2.2, 5.1.7 et de 5.1.10)

5.2.14 Proposition. Soient $(M, F, K) \in MF(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$, $S: K \otimes K \rightarrow a_X^! \mathbf{k}(-n)$ un accouplement, et g une fonction holomorphe sur X . Supposons que (M, F) soit quasi-unipotent et régulier le long de g , que

$$\begin{aligned} \text{can}(W_i \psi_{g,1}) &\subset W_i \phi_{g,1}, \quad \text{Var}(W_i \phi_{g,1}) \subset (W_{i-2} \psi_{g,1})(-1), \\ \text{Gr}_i^W \psi_g(M, F, K), \quad \text{Gr}_i^W \phi_{g,1}(M, F, K) &\in MH(X, \mathbf{k}, i), \end{aligned}$$

où W est décalée par $n-1$ ou n comme dans (5.1.6.2), et que $\text{Gr}^W {}^p \psi_g S \circ (id \otimes N^i)$ et $\text{Gr}^W {}^p \phi_{g,1} S \circ (id \otimes N^i)$ sont des polarisations sur $P_N \text{Gr}_{n-1+i}^W \psi_g(M, F, K)$ et $P_N \text{Gr}_{n+i}^W \phi_{g,1}(M, F, K)$, alors la condition (5.1.4.2) est valable pour (M, F, K) et g , donc on a la décomposition (5.1.4.3) pour (M, F, K) de sorte que (M_2, F, K_2) dans (5.1.4.3) est canoniquement isomorphe à un facteur direct de $P_N \text{Gr}_n^W \phi_{g,1}(M, F, K)$ et que la restriction de S à K_2 s'identifie à la restriction de $\text{Gr}^W {}^p \phi_{g,1} S$; en particulier $(M_2, F, K_2) \in MH(X, \mathbf{k}, n)$ et $S|_{K_2}$ est une polarisation.

Preuve. D'après 3.2.6, 5.1.4, 5.2.4 et 5.2.8, il suffit de vérifier la condition (5.1.4.2), mais c'est équivalente à:

$$\text{Gr}^W \phi_{g,1} = \text{Im } \text{Gr}^W \text{can} \oplus \text{Ker } \text{Gr}^W \text{Var}$$

d'après 5.1.14 (et par l'hypothèse de la proposition), donc l'assertion est réduite

au lemme suivant d'après 5.1.10–11 et 5.2.12.

5.2.15. Lemme (comparer à 4.2.4). Soient H^i (resp. H'^i) des $\mathbf{k}$ -structures de Hodge de poids $n-1+i$ (resp. $n+i$). Soient

$$\text{can}: H^i \rightarrow H'^{i-1} \quad \text{et} \quad \text{Var}: H'^i \rightarrow H^{i-1}(-1)$$

des morphismes de structures de Hodge tels que $N^i: H^i \rightarrow H^{-i}(-i)$ et $N^i: H'^i \rightarrow H'^{-i}(-i)$ sont des isomorphismes, où $N = \text{Var} \circ \text{can}$ ou $\text{can} \circ \text{Var}$. Soient $S: H^i \otimes H^{-i} \rightarrow \mathbf{k}(1-n)$, $S': H'^i \otimes H'^{-i} \rightarrow \mathbf{k}(-n)$ des accouplements des structures de Hodge ($i \in \mathbf{Z}$) tels que

$$S \circ (N \otimes \text{id}) + S \circ (\text{id} \otimes N) = 0 \quad (\text{de même pour } S')$$

$$S' \circ (\text{can} \otimes \text{id}) = S \circ (\text{id} \otimes \text{Var})$$

et que $S \circ (\text{id} \otimes N^i)$ est une polarisation de structures de Hodge [6] sur la partie primitive $P_N H^i$ pour $i \geq 0$ (de même pour S'), on a alors

$$S' = \text{Im can} \oplus \text{Ker Var}.$$

Preuve. Notons que $\text{can}: H^i \rightarrow H'^{i-1}$ et $\text{Var}: H'^i \rightarrow H^{i-1}(-1)$ sont injectifs pour $i \geq 1$, et que

$$\text{can}(PH^i) \subset PH'^{i-1} \oplus N(PH^{i+1}(1))$$

$$\text{Var}(PH'^i) \subset PH^{i-1}(-1) \oplus N(PH^{i+1}), \quad \text{cf. 4.1.2,}$$

alors il suffit de vérifier :

$$(5.2.15.1) \quad \text{can}(PH^i) \subset PH'^{i-1} \quad \text{pour tout } i,$$

$$(5.2.15.2) \quad \text{can}(PH^i) = PH'^{i-1} \quad \text{pour } i \geq 2,$$

car ces conditions entraînent que can et Var sont compatibles avec la décomposition de Lefschetz, i.e.

$$\bigoplus_j N^j PH^i \xrightleftharpoons[\text{Var}]{\text{can}} \bigoplus_j N^j PH'^{i-1}.$$

En effet, pour $i=1$ on a

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ PH^1 & \xrightarrow{\sim} & N(PH^1) \\ \text{can} \searrow & & \nearrow \text{Var} \\ & PH^0 & \end{array}$$

et pour $i=0$, $PH^0 \subset \text{Ker can}$ d'après (5.2.15.1).

D'abord on voit que (5.2.15.2) pour $i=j+2$ entraîne (5.2.15.1) pour $i=j$.

En effet, pour $u \in PH^j$, posons $u = u_0 + Nu_1$ avec $u_k \in PH^{j-1+2k}$, alors $u_1 =$ can u'_1 pour $u'_1 \in PH^{j+2}$ par hypothèses. Puisque

$$Nu = \text{Var } u_0 + N^2 u'_1 = v_0 + Nv_1 + N^2 u'_1$$

avec $v_k \in PH^{i-2+2k}$, on a $u = v_1$ et $v_0 = u'_1 = u_1 = 0$; d'où (5.2.15.1) pour $i = j$.

Si $i \gg 0$ on a $PH^i = 0$, dans ce cas il faut montrer que $PH^{i-1} = 0$; mais cela résulte de la positivité de polarisation, car on a

$$S \circ (\text{Var} \otimes N^{i-2} \text{Var}) + S' \circ (id \otimes N^{i-1}) = 0$$

sur $H^{i-1} \otimes H^{i-1}$ (i.e. si $u \in PH^{i-1}$ et $\text{Var } u \in PH^{i-2}$ ($i \geq 2$), on a $u = 0$.) Donc, par l'injectivité de Var ci-dessus, il suffit de montrer:

$$\text{Var}(PH^{i-1}) \subset N(PH^i) \quad \text{pour } i \geq 2$$

en supposant (5.2.15.1) pour le même i . Pour $u \in PH^{i-1}$, posons $\text{Var } u = u_0 + Nu_1$ avec $u_k \in H^{i-2+2k}$. Si $u_0 \neq 0$, on a $u' := u - \text{can } u_1 \in PH^{i-1}$ tel que $\text{Var } u' \in PH^{i-2}$ et que $u' \neq 0$; mais c'est contradictoire à la positivité ci-dessus; d'où l'assertion. Ce qui achève la preuve de 5.2.14.

5.2.16. Proposition. *Pour une variété complexe lisse X , on définit $K_X = \mathbf{k}_X[d_X]$ et $S_X: K_X \otimes K_X \rightarrow a_X^! \mathbf{k}(-d_X)$ par*

$$(-1)^{d_X(d_X-1)/2}: (K_X \otimes K_X)^{-2d_X} \rightarrow \mathbf{k}_X$$

comme dans 5.2.12, alors S_X est $(-1)^{d_X}$ -symétrique et

$$(K_{X \times Y}, S_{X \times Y}) \cong (K_X, S_X) \boxtimes (K_Y, S_Y)$$

i.e. $K_{X \times Y} \cong K_X \boxtimes K_Y$ et le diagramme suivant commute (cf. [11]):

$$\begin{array}{ccc} K_{X \times Y} \otimes K_{X \times Y} & \xrightarrow{S_{X \times Y}} & a_{X \times Y}^! \mathbf{k}(-d_X - d_Y) \\ \parallel & & \parallel \\ (K_X \otimes K_X) \boxtimes (K_Y \otimes K_Y) & \xrightarrow{S_X \boxtimes S_Y} & a_X^! \mathbf{k}(-d_X) \boxtimes a_Y^! \mathbf{k}(-d_Y) \end{array}$$

Soit g une fonction holomorphe sur X telle que $D = g^{-1}(0)$ est un diviseur réduit à croisements normaux. Soit W la filtration de ${}^p\psi_g K_X$ associée à N décalée par $d_X - 1$ comme dans 5.1.6, alors la restriction de ${}^p\psi_g S_X \circ (id \otimes N^i)$ à la partie primitive de $Gr_{d_X-1+i}^W(i)$ coïncide à $(a_{i+1})_* S_{\bar{D}^{(i+1)}}$ à un constant multiplicatif positif près par l'isomorphisme canonique:

$$(5.2.16.1) \quad P_N Gr_{d_X-1+i}^W({}^p\psi_g K_X(i)) \cong (a_{i+1})_* K_{\bar{D}^{(i+1)}} \otimes \varepsilon^{i+1}$$

cf. 3.6.1 pour la notation.

Preuve. La première assertion est claire, car

$$(d_X + d_Y)(d_X + d_Y - 1)/2 = d_X(d_X - 1)/2 + d_Y(d_Y - 1)/2 + d_X d_Y.$$

D'après 3.4.12 et 3.6.10, on a un isomorphisme canonique:

$$(5.2.16.2) \quad P_N Gr_{d_X-1+i}^W {}^p\psi_g(K_X \otimes C) \cong (a_{i+1})_* \mathcal{C}_{\tilde{D}^{(i+1)}}[d_X - i - 1] \otimes \varepsilon^{i+1}$$

(en particulier, ${}^p\psi_{g,1} = {}^p\psi_g$). D'après 5.1.12, $\text{can}: (\psi_{g,1}, W) \rightarrow (\phi_{g,1}, W)$ est strict et

$$(5.2.16.3) \quad \text{Ker}(Gr_{d_X-1-i}^W \text{ can}) \cong N^i(P_N Gr_{d_X-1+i}^W {}^p\psi_{g,1})(i)$$

par la décomposition de Lefschetz. D'autre part, on a une suite exacte:

$$(5.2.16.4) \quad 0 \rightarrow K_D \rightarrow {}^p\psi_{g,1} K \rightarrow {}^p\phi_{g,1} K \rightarrow 0$$

où $K_D = \mathcal{K}_D[d_X - 1]$, et une résolution canonique de K_D par le complexe:

$$[(a_1)_* \mathcal{K}_{\tilde{D}^{(1)}} \otimes \varepsilon^1 \rightarrow \dots \rightarrow (a_{d_X})_* \mathcal{K}_{\tilde{D}^{(d_X)}} \otimes \varepsilon^{d_X}]$$

muni d'une filtration W définie par la filtration bête, i.e. $W_i = \sigma_{\geq -i}$. Alors W est la unique filtration de K_D dans $\text{Perv}(\mathcal{K}_X)$, telle que $Gr_{d_X-i}^W$ soit le plus grand sous-objet de K_D/W_{d_X-i-1} , à support dans $D^{(i)}$ pour tout i . D'après (5.2.16.2-3), on vérifie par récurrence que cette filtration W coïncide à la filtration induite par la filtration W de $\psi_{g,1} K$ par la suite exacte (5.2.16.4); d'où (5.2.16.1).

On démontre l'assertion pour la polarisation par récurrence sur i . Puisque l'assertion est locale et compatible avec le produit $\boxtimes$, on peut supposer que X est un polydisque et que $g = x_1 \cdots x_n$ avec $n = d_X = i + 1$. On a alors la trivialisat: $\varepsilon^j \cong \mathbb{Z}$ pour $j \geq 1$ par l'ordre des coordonnées. Le cas $i = 0$ est clair par définition (cf. la preuve de 5.2.12). Supposons que $i > 0$. Soient $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$ et I un sous-ensemble de $\bar{n}$. On définit:

$$\mathcal{P}_I = \mathcal{P}_{x_1} \cdots \mathcal{P}_{x_n} {}^p\psi_g K_X, \quad \text{où } \mathcal{P}_{x_j} = {}^p\phi_{x_j,1} \text{ (si } j \in I \text{) et } {}^p\psi_{x_j,1} \text{ (sinon),}$$

on a alors les morphismes:

$$\text{can}_j: \mathcal{P}_I \rightarrow \mathcal{P}_{I \cup \{j\}} \quad (j \notin I) \quad \text{et} \quad \text{Var}_j: \mathcal{P}_I \rightarrow \mathcal{P}_{I \setminus \{j\}}(-1) \quad (j \in I)$$

induits par les foncteurs ${}^p\psi_{x_j,1}$ et ${}^p\phi_{x_j,1}$, et la filtration W de $\mathcal{P}_I$ induite par celle de ${}^p\psi_g K_X$, car les foncteurs ψ, ϕ sont exacts. On a de plus les accouplements:

$$S_I: \mathcal{P}_I \otimes \mathcal{P}_I \rightarrow \mathcal{K}(1 - |I|)$$

d'après 5.2.3-4. Donc il suffit de vérifier que l'image de

$$S_{\bar{n}} \circ (id \otimes N^i): Gr_{2i}^W \Psi_{\bar{n}}(i) \otimes Gr_{2i}^W \Psi_{\bar{n}}(i) \rightarrow \mathbf{k}$$

est non nulle et contenue dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$ (où $i=d_X-1$) d'après 5.2.8. Soit

$$\tilde{K} = {}^p\phi_{x_{2,1}} \cdots {}^p\phi_{x_{n,1}} {}^p\psi_g K_X \in \text{Perv}(\mathbf{k}_C)$$

où $C = \{x_2 = \cdots = x_n = 0\}$, alors ${}^p\psi_{x_{1,1}} \tilde{K} = \Psi_{\bar{n} \setminus \{1\}} \tilde{K}$ et ${}^p\phi_{x_{1,1}} \tilde{K} = \Psi_{\bar{n}}$. (Notons que $\Psi_{\bar{n}} \cong \mathbf{k}[N]/(N^{i+1})$ et $\Psi_{\bar{n} \setminus \{1\}} \cong \mathbf{k}[N]/(N^i)$ comme $\mathbf{k}[N]$ -module (non-canoniquement) d'après 3.6.8, où N est toujours associé au foncteur ${}^p\psi_{g,1}$.) Soit

$$\tilde{S}: \tilde{K} \otimes \tilde{K} \rightarrow \mathbf{k}(-i)$$

l'accouplement induit, alors ${}^p\psi_{x_{1,1}} \tilde{S} = S_{\bar{n} \setminus \{1\}}$ et ${}^p\phi_{x_{1,1}} \tilde{S} = S_{\bar{n}}$. Par hypothèse de récurrence,

$$\tilde{S} \circ (id \otimes N^{i-1}): Gr_{2i-1}^W \tilde{K}(i-1) \otimes Gr_{2i-1}^W \tilde{K}(i-1) \rightarrow a_C^! \mathbf{k}(-1)$$

coïncide à $S_C: K_C \otimes K_C \rightarrow a_C^! \mathbf{k}(-1)$ à un constant multiplicatif positif près (car Gr^W commute à ϕ_{x_j}), donc l'image de

$$S_{\bar{n} \setminus \{1\}} \circ (id \otimes N^{i-1}): Gr_{2i-1}^W \Psi_{\bar{n} \setminus \{1\}}(i-1) \otimes Gr_{2i-1}^W \Psi_{\bar{n} \setminus \{1\}}(i-1) \rightarrow \mathbf{k}$$

est non nulle et contenue dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$. D'après 3.4.12 et 3.6.8, on a

$$\text{Var}_1: Gr_{2i}^W \Psi_{\bar{n}} \xrightarrow{\sim} Gr_{2i-1}^W \Psi_{\bar{n} \setminus \{1\}}(-1)$$

$$N^{i-1}: Gr_{2i-1}^W \Psi_{\bar{n} \setminus \{1\}} \xrightarrow{\sim} Gr_1^W \Psi_{\bar{n} \setminus \{1\}}(1-i)$$

$$\text{et} \quad N = -\text{can}_1 \text{Var}_1 \quad (\text{car } (dx \otimes 1)(x_1 \partial_1 + s + 1) = 0).$$

D'après 5.2.4, on a

$$S_{\bar{n}} \circ (\text{can}_1 \otimes id) = S_{\bar{n} \setminus \{1\}} \circ (id \otimes \text{Var}_1): Gr_1^W \Psi_{\bar{n} \setminus \{1\}} \otimes Gr_{2i}^W \Psi_{\bar{n}} \rightarrow \mathbf{k}(-i),$$

donc

$$S_{\bar{n}} \circ (id \otimes N^i) = S_{\bar{n} \setminus \{1\}} \circ (\text{Var}_1 \otimes N^{i-1} \text{Var}_1): Gr_{2i}^W \Psi_{\bar{n}} \otimes Gr_{2i}^W \Psi_{\bar{n}} \rightarrow \mathbf{k}(-2i),$$

car $N^{i-1} \text{Var}_1 = \text{Var}_1 N^{i-1}$ et $\tilde{S}(N \otimes id) = -\tilde{S}(id \otimes N)$; d'où l'assertion.

5.2.17. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Soit $\mathcal{A} = \{(p, q) \in (\mathbf{Z} \cup \{\pm \infty\})^2: p \leq q\}$. Pour $\alpha = (p, q)$, posons $\alpha_1 = p$ et $\alpha_2 = q$. On définit un ordre de $\mathcal{A}$ par: $\alpha > \beta$ ssi $\alpha_i \geq \beta_i$ pour $i=1, 2$. Alors un objet quasi-filtré de $\mathcal{C}$ consiste en des objets $K(\alpha)$ de $\mathcal{C}$ pour $\alpha \in \mathcal{A}$, munis de morphismes:

$$\begin{aligned} u_{\beta\alpha}: K(\alpha) &\rightarrow K(\beta) && \text{pour } \alpha > \beta \\ v_{\beta\alpha}: K(\alpha) &\rightarrow K(\beta)[1] && \text{pour } \alpha_2 = \beta_1 \end{aligned}$$

satisfaisant les conditions:

$$\begin{aligned}
 (5.2.17.1) \quad & u_{\alpha\alpha} = id \quad \text{pour } \alpha \in A \\
 & u_{\gamma\alpha} = u_{\gamma\beta} u_{\beta\alpha} \quad \text{pour } \alpha > \beta > \gamma \\
 & u_{\delta\beta} v_{\beta\alpha} = v_{\delta\gamma} u_{\gamma\alpha} \quad \text{pour } \alpha > \gamma, \beta > \delta, \\
 & \alpha_2 = \beta_1, \gamma_2 = \delta_1
 \end{aligned}$$

$$(5.2.17.2) \quad \text{il existe } n, m \in \mathbb{Z} \text{ tels que } K(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha_2 \leq n \text{ ou } \alpha_1 \geq m.$$

$$(5.2.17.3) \quad \text{pour } \alpha, \beta, \gamma \in A \text{ tels que } \alpha_1 = \gamma_2, \alpha_2 = \beta_2, \beta_1 = \gamma_1,$$

$$\begin{aligned}
 K(\alpha) &\xrightarrow{u_{\beta\alpha}} K(\beta) \xrightarrow{u_{\gamma\beta}} K(\gamma) \xrightarrow{v_{\alpha\gamma}} K(\alpha)[1] \\
 &\text{est un triangle distingué de } \mathcal{C}.
 \end{aligned}$$

Posons $K(p) = K(p, +\infty)$, $K = K(-\infty, +\infty)$, $K(/p) = K(-\infty, p)$, $K(p/q) = K(p, q)$ et $Gr^p K = K(p/p+1)$, on a alors

$$K(p/) \simeq K \quad \text{si } p \leq n \text{ et nul si } p \geq m.$$

Pour $-\infty \leq p < q < r \leq +\infty$ on a un diagramme de l'octaèdre:

$$(5.2.17.4) \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & K(p/r) & & \\
 & \nearrow u & & \nwarrow u & \\
 K(q/r) & & & & K(p/q) \\
 & \nwarrow v & & \nearrow u & \\
 & & K(r/s) & & K(p/s) \\
 & \nearrow u & & \nwarrow u & \\
 & & K(q/s) & &
 \end{array}$$

Notons que les objets quasi-filtrés sont stables par foncteurs exacts de catégories triangulées. Si $\mathcal{C} = D_c^b(\mathbf{k}_X)$ (resp. $\mathcal{C}$ est la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne), un faisceau pervers (resp. un complexe) K muni d'une filtration décroissante finie F définit uniquement un objet quasi-filtré $\{K(\alpha); u, v\}$ tel que $K(p/q) \simeq F^p K / F^q K$ d'après [1]. De même, si $\mathcal{C}$ est une t -catégorie on associe à un objet K de $\mathcal{C}^{\geq a} \cap \mathcal{C}^{\leq b}$ un objet quasi-filtré $\{K(\alpha); u, v\}$ tel que $K(p/q) = \tau_{\leq -p} \tau_{> -q} K$, cf. [loc. cit.]. Alors la suite spectrale de Leray (à un décalage près) est associée à (l'image par un foncteur exact de) cet objet quasi-filtré par le lemme ci-dessous (cf. [6]). Notons que si $\mathcal{C} = D_c^b(\mathbf{k}_X)$, la t -structure perverse est

auto-duale [1].

5.2.18. Lemme. (Verdier). *Avec les notations de 5.2.17, soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $H^i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{Z}$) un foncteur cohomologique. Alors on a une suite spectrale dans $\mathcal{A}$:*

$$(5.2.18.1) \quad E_1^{pq} = H^{p+q} Gr^p K \Rightarrow H^{p+q} K$$

telle que la filtration F de $H^i K$ soit définie par

$$F^p H^i K = \text{Im} (H^i K(p) \rightarrow H^i K) = \text{Ker} (H^i K \rightarrow H^i K(/p)).$$

Preuve (d'après [37]). On définit pour $p, q, i \in \mathbb{Z}$ tels que $p+q=i$ et pour $1 \leq r \leq \infty$:

$$\begin{aligned} Z_r^{pq} &= \text{Im} (H^i K(p/p+r) \xrightarrow{u} H^i Gr^p K) \\ &= \text{Ker} (H^i Gr^p K \xrightarrow{v} H^{i+1} K(p+1/p+r)) \\ H^i Gr^p K / B_r^{pq} &= \text{Coim} (H^i Gr^p K \xrightarrow{u} H^i K(p-r+1/p+1)) \\ &= \text{Coker} (H^{i-1}(p-r+1/p) \xrightarrow{v} H^i Gr^p K) \\ E_r^{pq} &= \text{Im} (Z_r^{pq} \rightarrow H^i Gr^p K / B_r^{pq}). \end{aligned}$$

Notons que $Z_r^{pq} \supset B_r^{pq}$ car la composition:

$$K(p/q) \xrightarrow{v} K(q/r)[1] \xrightarrow{v} K(r/s)[2]$$

est nulle pour $p < q < r < s$ d'après (5.2.17.4). On a de plus les isomorphismes:

$$\begin{aligned} Gr_F^p H^i K &\cong \text{Im} (H^i K(p) \xrightarrow{u} H^i K(/p+1)) \cong E_\infty^{pq} \\ Z_r^{pq} / Z_{r+1}^{pq} &\cong \text{Im} (H^i K(p/p+r) \xrightarrow{vu} H^{i+1}(p+1/p+r+1)) \\ &\cong B_{r+1}^{p+r, q-r+1} / B_r^{p+r, q-r+1} \end{aligned}$$

par le diagramme de l'octaèdre (5.2.17.4) pour $(p, q, r, s) = (-\infty, p, p+1, +\infty)$, $(p, p+1, p+r, p+r+1)$ et par la commutativité (5.2.17.1). On définit les différentielles $d_r^{pq}: E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ par la composition:

$$\begin{aligned} E_r^{pq} &= Z_r^{pq} / B_r^{pq} \twoheadrightarrow Z_r^{pq} / Z_{r+1}^{pq} \cong B_{r+1}^{p+r, q-r+1} / B_r^{p+r, q-r+1} \\ &\hookrightarrow Z_r^{p+r, q-r+1} / B_r^{p+r, q-r+1} = E_r^{p+r, q-r+1}. \end{aligned}$$

On a alors $d_r^{pq} d_r^{p-r, q+r-1} = 0$ et

$$\text{Ker } d_r^{pq} / \text{Im } d_r^{p-r, q+r-1} \cong H(B_{r+1}^{pq} / B_r^{pq} \rightarrow Z_r^{pq} / B_r^{pq} \rightarrow Z_r^{pq} / Z_{r+1}^{pq}) \cong E_{r+1}^{pq},$$

d'où l'assertion.

5.2.19. Remarque. La construction de la suite spectrale (5.2.18.1) est auto-duale (cf. [6]). En effet, on a l'objet quasi-filtré dual: $\{\check{K}(\alpha); \check{u}, \check{v}\}$ par $\check{K}(p/q) = K(-q+1/-p+1)^\circ \in \mathcal{C}^\circ$, et $\check{H}^i: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{A}^\circ$ par $\check{H}^i = (H^{-i})^\circ$; donc on obtient une suite spectrale dans $\mathcal{A}^\circ$:

$$(5.2.19.1) \quad \check{E}_1^{pq} = \check{H}^{p+q} Gr^p \check{K} \Rightarrow \check{H}^{p+q} \check{K}$$

en appliquant 5.2.18 à $\{\check{K}(\alpha); \check{u}, \check{v}\}$. Par la construction, (5.2.19.1) est canoniquement isomorphe à la suite spectrale duale de (5.2.18.1), i.e. on a les isomorphismes canoniques:

$$\check{E}_r^{pq} \cong (E_r^{-p, -q})^\circ, \quad Gr_F^p \check{H}^i \check{K} \cong (Gr_F^{-p} H^{-i} K)^\circ$$

compatibles avec les différentielles: $d_r^{pq}, \check{d}_r^{pq}$ et avec les isomorphismes: $E^{pq} \cong Gr_F^p H^{p+q} K$, etc.

5.2.20. Remarque. Si $\mathcal{C} = D_c^b(k_X)$, $\mathcal{A} = \text{Perv}(k_X)$ et H^0 est le foncteur cohomologique pervers (cf. [1]), on a le foncteur dual:

$$\mathcal{D}: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{C}, \quad \mathcal{D}: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{A}$$

compatible avec les foncteurs $\check{H}^i, H^i$. En appliquant 5.2.18 à $\{\mathcal{D}\check{K}(\alpha); \mathcal{D}\check{u}, \mathcal{D}\check{v}\}$, on obtient:

$$(5.2.20.1) \quad \mathcal{D}\check{E}_1^{pq} = H^{p+q} \mathcal{D} Gr_F^p \check{K} \Rightarrow H^{p+q} \mathcal{D}\check{K}.$$

Cette suite spectrale est canoniquement isomorphe à (5.2.19.1) par le foncteur $\mathcal{D}$.

Soit $\{K'(\alpha); u', v'\}$ un objet quasi-filtré, et soit

$$w: \{K'(\alpha); u', v'\} \rightarrow \{\mathcal{D}\check{K}(\alpha); \mathcal{D}\check{u}, \mathcal{D}\check{v}\}$$

un morphisme des objets quasi-filtrés, i.e. w est une famille de morphismes $w_\alpha: K'(\alpha) \rightarrow \mathcal{D}\check{K}(\alpha)$ compatibles avec u', v' , etc. Alors on obtient un morphisme de la suite spectrale (5.2.18.1) pour $\{K'(\alpha); u', v'\}$ dans (5.2.20.1), i.e. on a des accouplements canoniques:

$$\begin{aligned} E_r'^{pq} \otimes E_r^{-p, -q} &\rightarrow a_X^! k \\ (H^i K', F) \otimes (H^{-i} K, F) &\rightarrow a_X^! k \end{aligned}$$

compatibles avec les différentielles $d_r'^{pq}, d_r^{pq}$ et avec les isomorphismes: $E_\infty'^{pq} \cong Gr_F^p H^{p+q} K'$, etc.

5.2.21. Remarque. Si $\mathcal{C} = D(\mathcal{A})$ pour une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, $\{K^*; u, v\}$ est associé à un complexe filtré (K^*, F) (cf. 5.2.17) et H est le foncteur cohomologique usuel, alors (5.2.18.1) coïncide à la suite spectrale usuelle associée à (K^*, F) comme dans [6] [37].

5.3. Stabilité par image directe par un morphisme projectif

Dans ce paragraphe on démontre

5.3.1. Théorème. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme projectif de variétés complexes lisses, et soit l la première classe de Chern d'un faisceau inversible relativement ample pour f . Soit $(M, F, K) \in MH_Z(X, \mathbf{k}, n)$ muni d'une polarisation S , alors

$$(5.3.1.1) \quad f_*(M, F) \text{ est strict et } \mathcal{H}^i f_*(M, F, K) \in MH(Y, \mathbf{k}, n+i), \quad \text{cf. (5.1.3.2).}$$

$$(5.3.1.2) \quad l^i: \mathcal{H}^{-i} f_*(M, F, K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i f_*(M, F, K)(i) \quad \text{pour } i \geq 0$$

(Lefschetz vache),

$$(5.3.1.3) \quad (-1)^{i(i-1)/2p} \mathcal{H}^i f_* \circ (id \otimes l^i): P_l^p \mathcal{H}^{-i} f_* K \otimes P_l^p \mathcal{H}^{-i} f_* K \rightarrow a_Y^! \mathbf{k}(-n+i)$$

est une polarisation de la partie l -primitive $P_l \mathcal{H}^{-i} f_*(M, F, K)$
 $(:= \text{Ker } l^{i+1} \subset \mathcal{H}^{-i} f_*(M, F, K))$ pour $i \geq 0$.

La démonstration est par récurrence sur $\dim Z$: le cas $\dim f(Z) > 0$ sera traité en 5.3.4–6, et $\dim f(Z) = 0$ en 5.3.8–11. D'abord on définit l'action de l sur $\mathcal{H}^i f_*(M, F)$ (ou plutôt sur (M, F) dans $DF(\mathcal{D}_X)$).

5.3.2. Lemme. Soit X une variété complexe lisse. Soit ω une forme C^∞ fermée de type (1,1), on a alors un morphisme fonctoriel pour $(M, F) \in DF(\mathcal{D}_X)$:

$$(5.3.2.1) \quad \omega_\wedge: (M, F) \rightarrow (M, F)(1)[2]$$

compatible avec l'action naturelle de $l = [\omega] \in H^2(X, \mathbf{C})$:

$$l: DRM \rightarrow DRM[2] \quad \text{dans } D(\mathbf{C}_X).$$

Si de plus $\omega = d\pi$ avec π une forme C^∞ de type (1,0), le morphisme (5.3.2.1) est nul.

Preuve. Soit ${}^\infty \mathcal{Q}_X^{\bullet\bullet}$ le complexe double des formes C^∞ complexes, on définit une filtration F par:

$$F_p {}^\infty \mathcal{Q}_X^{i,j} = {}^\infty \mathcal{Q}_X^{i,j} \text{ si } p \geq -i \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

On a alors un quasi-isomorphisme filtré: $(\mathcal{Q}_X^\bullet, F) \rightarrow ({}^\infty \mathcal{Q}_X^\bullet, F)$ par le lemme de

Dolbeault. Soit $d = \dim X$, on a alors des quasi-isomorphismes filtrés :

$$(5.3.2.2) \quad ({}^\infty\mathcal{Q}_X^\bullet, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)[d] \leftarrow (\mathcal{Q}_X^\bullet, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{D}_X, F)[d] \rightarrow (\mathcal{Q}_X^d, F)$$

Soit (L, F) le premier complexe de (5.3.2.2), alors on obtient

$$\omega_\wedge : (L, F) \rightarrow (L, F)(1)[2]$$

et une homotopie de $\omega_\wedge$:

$$h = \pi_\wedge : (L, F) \rightarrow (L, F)(1)[1]$$

(i.e. $dh + hd = \omega_\wedge$) si π est comme ci-dessus. Donc pour définir (5.3.2.1) (et son homotopie si $\omega = d\pi$, etc.), il suffit de vérifier que les morphismes dans (5.3.2.2), tensorisés par un $\mathcal{D}_X$ -Module à gauche filtré $(M, F) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{Q}_X^d, F)^{-1}$ sont des quasi-isomorphismes filtrés; mais cela résulte du fait que ${}^\infty\mathcal{Q}_X^{i,j}$ sont plats sur $\mathcal{O}_X$, cf. [39], et de 2.1.6. Il reste à démontrer la compatibilité avec l'action de l . Par définition, l'action de l s'écrit :

$$\omega \otimes id : DRM \rightarrow {}^\infty\mathcal{Q}_X^\bullet[2] \otimes_{\mathcal{O}} DRM \xleftarrow{1 \otimes id} DRM.$$

Posons

$$K := {}^\infty\mathcal{Q}_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} (M \otimes (\mathcal{Q}_X^d)^{-1}) (= DR(L \otimes_{\mathcal{O}} (M \otimes (\mathcal{Q}_X^d)^{-1})) \simeq DRM)$$

alors la composition de $1 \otimes id : K \rightarrow {}^\infty\mathcal{Q}_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} K$ et de $\wedge : {}^\infty\mathcal{Q}_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} K \rightarrow K$ est identique, i.e. $\wedge$ est l'inverse de $1 \otimes id$; d'où l'assertion.

5.3.3. Remarque. Soit L un faisceau inversible, i.e. un fibré vectoriel de rang 1. Soit u une métrique hermitienne de L . Si L est représenté par un 1-cycle $\{f_{\alpha\beta}\}$ associé à un recouvrement $\{U_\alpha\}$ de X , u est représenté par $\{u_\alpha\}$ tel que $u_\alpha = |f_{\alpha\beta}|^{-2} u_\beta$, où u_α est une fonction C^∞ réelle sur U_α . Alors c'est bien connu que $c_1(L)$ est représentée par une forme ω telle que $\omega = \partial\bar{\partial} \log u_\alpha$ sur U_α . Si on change la métrique u , la différence de ω est donnée par $\partial\bar{\partial} \log g$, où g est une fonction C^∞ réelle non nulle.

Preuve de 5.3.1 (dans le cas $\dim f(Z) > 0$).

D'abord on réduit l'assertion à :

5.3.4. Proposition. Soient $f: X \rightarrow Y$ et l comme dans 5.3.1. Soit g une fonction holomorphe sur Y , posons $h = gf$. Soit $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})$ à support strict Z (cf. 5.1.3) tel que $h^{-1}(0) \not\supset Z$, que (M, F) soit quasi-unipotent et régulier le long de h , et que $Gr_i^W \psi_h(M, F, K)$, $Gr_i^W \phi_{h,1}(M, F, K) \in MH(X, \mathbb{k}, i)$, où W est décalée par $n-1$ ou n . Soit $S: K \otimes K \rightarrow a_X^1 \mathbb{k}(-n)$ un accouplement. Supposons que les conclusions de 5.3.1 soient vérifiées pour f, l , $P_N Gr_{n-1+i}^W \psi_h(M, F, K)$ et $Gr^W \psi_h S \circ (id \otimes N^i)$ pour $i \geq 0$, alors

- (5.3.4.1) $f_*(M, F)$ est strict dans un voisinage de $g^{-1}(0)$, $\mathcal{H}^i f_*(M, F)$ sont quasi-unipotents et réguliers le long de g ,
- (5.3.4.2) la filtration W de $\psi_g \mathcal{H}^j f_*(M, F, K) \simeq \mathcal{H}^j f_* \psi_h(M, F, K)$ induite par la filtration $W[j]$ de $\psi_h(M, F, K)$ est la filtration associée à N décalée par $n-1+j$ (cf. 1.3.9) telle que $Gr_i^W \psi_g \mathcal{H}^j f_*(M, F, K) \in MH(Y, \mathbf{k}, i)$ (de même pour ϕ_1 , en remplaçant $n-1$ par n).
- (5.3.4.3) $l^i: \mathcal{H}^{-j} f_*(M, F, K) \rightarrow \mathcal{H}^j f_*(M, F, K)(i)$ est un isomorphisme au voisinage de $g^{-1}(0)$ ($j \geq 0$),
- (5.3.4.4) $(-1)^{j(j-1)/2} Gr^W \psi_g {}^p \mathcal{H} f_* S^\circ(id \otimes N^i l^j)$ est une polarisation sur la partie bi-primitive $P_1 P_N Gr_{n-1-j+i}^W \psi_g \mathcal{H}^{-j} f_*(M, F, K) (:= \text{Ker } l^{j+1} \cap \text{Ker } N^{i+1})$ pour $i, j \geq 0$ (de même pour $\phi_{g,1}$ en remplaçant $n-1$ par n).

5.3.4 $\Rightarrow$ 5.3.1 (dans le cas $\dim f(Z) > 0$)

Puisque l'assertion est locale, on peut supposer que $f(Z)$ soit irréductible. Par hypothèse de récurrence, toutes les conditions de 5.3.4 sont satisfaites. On a donc (5.3.1.2) d'après (5.3.4.3) et $f_*(M, F)$ est strict d'après (5.3.4.1). Alors l'accouplement ${}^p \mathcal{H} f_* S^\circ(id \otimes l^i)$ de ${}^p \mathcal{H}^{-i} f_* K$ est compatible avec la filtration F (cf. 5.2.9) d'après 2.5.6. On va vérifier que $\mathcal{H}^j f_*(M, F, K)$ sont quasiunipotents et réguliers le long de toute fonction holomorphe g localement définie sur Y . Si $g^{-1}(0) \not\supset f(Z)$, l'assertion résulte de (5.3.4.1). Si $g^{-1}(0) \supset f(Z)$, elle est équivalente à l'isomorphisme:

$$i_{g*} \mathcal{H}^j f_*(M, F) \simeq i_{0*} \mathcal{H}^j f_*(M, F)$$

d'après 3.2.6, où $i_0: Y = Y \times \{0\} \rightarrow Y \times \mathbf{C}$. Mais c'est valable pour (M, F) et pour h , donc cela résulte de la commutativité $(f \times id) \circ i_h = i_g \circ f$ et du fait que $f_*(M, F)$ est strict.

D'après (5.3.4.1-2), (5.3.4.4) et 5.1.12, toutes les conditions de 5.2.14 sont satisfaites pour $P_1 \mathcal{H}^{-j} f_*(M, F, K)$ et $(-1)^{j(j-1)/2} {}^p \mathcal{H} f_* S^\circ(id \otimes l^j)$ (car can , Var et N sont compatibles avec l'image directe f_*); on a donc (5.3.1.1) et (5.3.1.3) d'après 5.1.5, 5.1.8 et (5.2.10.2), car la décomposition de Lefschetz (pour l'action de l) est compatible avec la filtration de Hodge F d'après (5.3.1.2); d'où 5.3.1 (dans le cas $\dim f(Z) > 0$).

Preuve de 5.3.4.

Soit $\tilde{f} = f \times id: X \times \mathbf{C} \rightarrow Y \times \mathbf{C}$. Soient i_g et i_h comme dans 3.2.1. alors $\tilde{f} \circ i_h = i_g \circ f$. Posons $(\tilde{M}, F) = i_{h*}(M, F)$. Si $Gr^V \tilde{f}_*(\tilde{M}, F) (\simeq f_* Gr^V(\tilde{M}, F))$ est strict, on obtient (5.3.4.1) et l'isomorphisme

$$\psi_g \mathcal{H}^j f_*(M, F, K) \simeq \mathcal{H}^j f_* \psi_h(M, F, K) \quad (\text{de même pour } \phi_1)$$

en appliquant 3.3.17 à $(\tilde{M}, F)$ et $\tilde{f}$. On a de même (5.3.4.3), si $Gr^V l^i$ sont des isomorphismes. Donc l'assertion résulte de la proposition 5.3.5 ci-dessous (appliquée à $\psi_h(M, F, K)$, etc.); en fait $f_* \psi_h(M, F)$ est strict d'après 1.3.5–6 (appliqué à la projection de (5.3.5.1) dans $MG_h(\mathcal{B})$) et d'après 5.2.21, 5.1.14 (de même pour ϕ_1), et (5.3.4.4) résulte de (5.3.5.3), 5.2.13, 5.2.7, 5.2.9 et de 5.2.19, car $(-1)^{j(j-1)/2} {}^p \mathcal{H} f_* Gr^W {}^p \psi_h S^\circ(id \otimes N^i l^j)$ est une polarisation de $P_N P_{l1} C_i^{-j}$ par hypothèse.

5.3.5. Proposition. Soient f et l comme ci-dessus. Soit $(M, F, K, W) \in MHW(X, \mathbb{k})$ (cf. 5.1.14) muni d'un morphisme

$$N: (M, F, K, W) \rightarrow (M, F, K, W)(-1) \quad (= (M(-1), F[-1], K(-1), W[2]))$$

tel que $N^j: Gr_{r+j}^W \xrightarrow{\sim} Gr_{r-j}^W(-j)$. Soit $S: K \otimes K \rightarrow a_X^1 \mathbb{k}(-r)$ un accouplement tel que $S(id \otimes N) + S(N \otimes id) = 0$. Supposons que les conclusion de 5.3.1 soient satisfaites pour $f, l, P_N Gr_{r+i}^W(M, F, K)$ et $Gr^W S^\circ(id \otimes N^i)$ pour $i \geq 0$ (où $n = r + i$). On a alors une suite spectrale dans $MG_h(\mathcal{B}, \mathbb{k})$ (cf. 5.1.1):

$$(5.3.5.1) \quad E_1^{p,q} = \mathcal{H}^{p+q} f_* Gr_{-p}^W(M, F, K) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q} f_*(M, F, K)$$

qui dégénère en E_2 , et telle que $E_k^{p,q} \in MH(X, \mathbb{k}, q)^p$ (cf. 5.2.12) et que d_1 est strict. Posons ${}_k C_i^j = E_k^{-i-r, i+j+r}$, alors:

$$(5.3.5.2) \quad l^j: {}_k C_i^{-j} \xrightarrow{\sim} {}_k C_i^j(j) \quad \text{pour } j \geq 0$$

$$N^i: {}_k C_i^j \xrightarrow{\sim} {}_k C_{-i}^j(-i) \quad \text{pour } i \geq 0$$

(5.3.5.3) le morphisme naturel: $\text{Ker } d_1 \cap P_N P_{l1} C_i^{-j} \rightarrow P_N P_{l2} C_i^{-j}$ est un épimorphisme pour $i, j \geq 0$, où $P_N P_{lk} C_i^{-j}$ est la partie bi-primitive ($= \text{Ker } l^{j+1} \cap \text{Ker } N^{i+1}$) de ${}_k C_i^{-j}$.

Preuve. Puisque $\mathcal{H}^j f_* Gr_i^W(M, F, K) \in MH(Y, \mathbb{k}, i+j)^p$ par hypothèse (et par la décomposition de Lefschetz), on obtient la suite spectrale (5.3.5.1), en appliquant 5.2.18 à $f_*((M, F), W)$ (cf. 2.1.12), $f_*(K, W)$ et $DR f_*(M, W) \simeq \mathcal{C} \otimes f_*(K, W)$, car $DR \circ \mathcal{H}^j = {}^p \mathcal{H}^j \circ DR$. Puisque d_r sont des morphismes de $MG_h(\mathcal{B}, \mathbb{k})$, d_1 est strict, $E_2^{p,q} \in MH(X, \mathbb{k}, q)^p$ et $d_r = 0$ pour $r \geq 2$ d'après 5.1.14, 5.1.11. Par hypothèse, on a (5.3.5.2) pour $k=1$ D'après 5.1.10, 5.1.11, 5.1.14 (et par la décomposition par support strict), les autres assertions sont réduites à:

5.3.6. Lemme. Soient ${}_1 C_i^j$ des $\mathbb{k}$ -structures de Hodge de poids $i+j+r$ pour $i, j \in \mathbb{Z}$, telles que ${}_1 C_i^j = 0$ si $|i| \gg 0$ ou $|j| \gg 0$. Soient

$$d_1: {}_1 C_i^j \rightarrow {}_1 C_{i-1}^{j+1}, N: {}_1 C_i^j \rightarrow {}_1 C_{i-2}^{j+1}(-1), l: {}_1 C_i^j \rightarrow {}_1 C_{i+2}^{j-1}(1)$$

des morphismes de structures de Hodge, qui commutent mutuellement, et tels que $d_1^2=0$ et que (5.3.5.2) est satisfaite (pour $k=1$). Posons

$${}_2C_i^j = \text{Ker}(d_1: {}_1C_i^j \rightarrow {}_1C_{i-1}^{j+1})/\text{Im}(d_1: {}_1C_{i+1}^{j-1} \rightarrow {}_1C_i^j)$$

Soient $S: C_i^j \otimes C_{-i}^{-j} \rightarrow k(-r)$ des accouplements de structures de Hodge tels que

$$\begin{aligned} S(Nx \otimes y) + S(x \otimes Ny) &= 0, \quad S(lx \otimes y) = S(x \otimes ly) \\ S(dx \otimes y) + (-1)^j S(x \otimes dy) &= 0 \quad (\text{où } x \in {}_1C_i^j) \end{aligned}$$

et que $(-1)^{j(j-1)/2} S(\text{id} \otimes N^j l^j)$ est une polarisation de structures de Hodge sur la partie bi-primitive de ${}_1C_i^{-j}$ pour $i, j \geq 0$ (cf. (5.3.5.3)). Alors (5.3.5.2) pour $k=2$ et (5.3.5.3) sont valables pour ${}_kC_i^j$ définies ci-dessus.

Preuve. Cela résulte de 4.2.2 et de la preuve de 4.1.10, 4.2.2. (On peut aussi utiliser [11, II].) Ce qui achève la démonstration de 5.3.1 (dans le cas $\dim f(Z) > 0$).

5.3.7. Remarque. Lorsqu'on a démontré, 4.2.2 et 4.2.4, les signes n'étaient pas encore déterminés (i.e. 5.2.4 et 5.2.16 n'étaient pas obtenus). Les conventions de signe dans le lemme ci-dessus sont dues à [11, II]. Notons que ce sont compatibles avec (5.2.10.2), (5.3.1.3) et 5.2.16, etc. (et aussi avec un résultat de Schmid).

5.3.8. Preuve de 5.3.1 dans le cas $\dim f(Z)=0$.

D'après 5.1.9 et 5.2.11, on peut supposer que $X = \mathbf{P}^N$, $Y = pt$ et $l = c_1(\mathcal{O}_X(1))$. (Désormais Y désignera un hyperplan de X .) Soit A un sous-espace $\mathbf{P}^{N-2}$ de X , strictement non-caractéristique pour (M, F) , cf. 3.5.1. Soit $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement le long de A , et soit $p: \tilde{X} \rightarrow \mathbf{P}^1$ la projection telle que $p^{-1}(t)$ sont les hyperplans contenant A . On a alors une immersion fermée $\pi \times p: \tilde{X} \rightarrow X \times \mathbf{P}^1$. Posons

$$\begin{aligned} (\tilde{M}, F, \tilde{K}) &= \pi^*(M, F, K) (= (\pi \times p)^* pr_1^*(M, F, K)) \quad (\text{cf. 3.5.1}) \\ \tilde{S} &= \pi^* S: \tilde{K} \otimes \tilde{K} \rightarrow a_{\tilde{X}}^1 k(-n), \end{aligned}$$

alors $\tilde{S}$ est compatible avec la filtration de Hodge (cf. 5.2.10), car $\pi \times p$ est strictement non-caractéristique pour $pr_1^*(M, F)$ [1]. D'abord admettons:

$$(5.3.8.1) \quad \pi_*(\tilde{M}, F, \tilde{K}) = (M, F, K) \oplus (i_A)_* i_A^*(M, F, K) (-1) [-2]$$

où $i_A: A \rightarrow X$. (La démonstration sera donnée en 5.3.9). Alors $\pi_* \tilde{S}$ est compatible avec la décomposition par support strict (5.3.8.1), et la restriction de $\pi_* \tilde{S}$ à K coïncide avec S , car ils coïncident sur $X \setminus A$. Soit Y un fibre de p ,

soient $\tilde{i}_Y: Y \rightarrow \tilde{X}$ et $i_Y: Y \rightarrow X$ les inclusions naturelles, alors $i_Y = \pi \circ \tilde{i}_Y$ et donc $i_Y^*((M, F, K), S) \simeq \tilde{i}_Y^*((\tilde{M}, F, \tilde{K}), \tilde{S})$. Soit t une coordonnée locale de $\mathbf{P}^1$ telle que $Y = p^{-1}t^{-1}(0)$, posons $h = t \circ p$. Soit g une équation locale de Y dans X . Puisque Y est strictement non-caractéristique pour $(\tilde{M}, F)$ (resp. (M, F)) dans un voisinage de A , ce Module filtré est quasi-unipotent et régulier le long de h (resp. g) et on a

$$\psi_h((\tilde{M}, F, \tilde{K}), \tilde{S}) \lesssim \tilde{i}_Y^*((\tilde{M}, F, \tilde{K}), \tilde{S}) \simeq i_Y^*((M, F, K), S) \lesssim \psi_g((M, F, K), S)$$

et $\phi_{h,1}(\tilde{M}, F, \tilde{K}) = 0$ (en particulier $N = 0$ et $\psi_h = \psi_{h,1}$) au voisinage de A d'après 3.5.6. Alors toutes les hypothèses de 5.3.4 sont satisfaites pour $p: \tilde{X} \rightarrow \mathbf{P}^1$, $\tilde{l} = \pi^*l$, t , $(\tilde{M}, F, \tilde{K})$ et $\tilde{S}$ par hypothèse de récurrence, car $((\tilde{M}, F, \tilde{K}), \tilde{S})$ et $((M, F, K), S)$ coïncident sur $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(A) = X \setminus A$. On a donc (5.3.4.1–4) pour toute coordonnée locale de $\mathbf{P}^1$; en particulier, $p_*(\tilde{M}, F)$ est strict, $\mathcal{H}^j p_*(\tilde{M}, F, \tilde{K})$ admet la décomposition par support strict d'après 5.2.14 et toutes les hypothèses dans l'assertion suivante (dont la preuve sera donnée en 5.3.10) sont satisfaites pour la $\mathbf{P}^1$ -composante de $P_{\tilde{t}} \mathcal{H}^{-j} p_*(\tilde{M}, F, \tilde{K})$ et de ${}^p \mathcal{H} p_* \tilde{S} \circ (id \otimes \tilde{l}^j)$:

(5.3.8.2) Soient X une variété complexe lisse compacte kählérienne de dimension 1, $(M, F, K) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbf{k})$ à support strict X , et $S: K \otimes K \rightarrow a_X^! \mathbf{k}(-n)$ un accouplement. Si (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de toute coordonnée locale t , de sorte que $Gr_i^W \psi_t(M, F, K)$, $Gr_i^W \phi_{t,1}(M, F, K) \in MH(pt, \mathbf{k}, i)$ (où W est décalée par $n-1$ ou n , cf. (5.1.6.2) et que $Gr^W \psi_t S(id \otimes N^j)$ est une polarisation sur $P_N Gr_{n-1+j}^W \psi_t(M, F, K)$ pour $j \geq 0$, alors l'assertion (5.3.1.1) et l'assertion (5.3.1.3) pour $i=0$ sont valables pour $f: X \rightarrow pt$.

(Notons que c'est le unique point où on utilise la théorie de Hodge classique (cf. [36]) dans la preuve de 5.3.1.) D'après [8], 2.1.12 et (5.3.4.3), on a la décomposition non-canonique:

$$p_*(\tilde{M}, F) \simeq \bigoplus \mathcal{H}^j p_*(\tilde{M}, F)[-j] \quad \text{dans} \quad D^b F(\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}),$$

donc la suite spectrale de Leray pour $a_{\tilde{X}} = a_{\mathbf{P}^1} \circ p$ dégénère en E_2 et on a (5.3.4.1) pour $(\tilde{M}, F, \tilde{K})$ et $a_{\tilde{X}}: \tilde{X} \rightarrow pt$ (et de même pour (M, F, K) et $a_X: X \rightarrow pt$ d'après (5.3.8.1)), car $MH(pt, \mathbf{k}, i)$ est stable par extensions dans $MF_h(pt, \mathbf{k})$, cf. [6].

Soit Y un fibre générique de p , alors Y est strictement non-caractéristique pour (M, F) , donc

$$(M', F, K') := i_Y^*(M, F, K)[-1] \in MH(Y, \mathbf{k}, n-1)$$

et $S' := {}^p i_Y^* S$ est une polarisation par le même argument que ci-dessus où ${}^p i_Y^* S$

est définie comme ${}^b\psi S$ dans 5.2.3. On a de plus :

$$(5.3.8.3) \quad (H(a_X)_* S)(u, l^j v) = (-1)^{j-1} (H(a_Y)_* S')(i_Y^* u, l^{j-1} i_Y^* v) \\ \text{pour } u, v \in H^{-j}(X, K) (= H^{-j}(a_X)_* K),$$

(La démonstration sera donnée en 5.3.11.) Par hypothèse de récurrence, les assertions (5.3.1.1–3) sont valables pour $a_Y: Y \rightarrow pt$, $l' := i_Y^* l$, (M', F, K') et S' . D'après 3.5.9–10, on a les morphismes compatibles avec les structures de Hodge :

$$i_Y^*: H^j(X, K) \rightarrow H^{j+1}(Y, K') \\ (i_Y)_*: H^{j-1}(Y, K') \rightarrow H^j(X, K)(1).$$

On a de plus $(i_Y)_* i_Y^* = l: H^j(X, K) \rightarrow H^{j+2}(X, K)(1)$, car $K \rightarrow K|_Y \xrightarrow{\sim} R\Gamma_Y K(1)[2] \rightarrow K(1)[2]$ s'identifie au même morphisme pour $K = \mathbf{Z}_X$, tensorisé par K . D'après 2.1.18 (voir aussi [1]), i_Y^* (resp. $(i_Y)_*$) est bijectif pour $j \leq -2$ (resp. $j \geq 2$) et injectif pour $j = -1$ (resp. surjectif pour $j = 1$), donc (5.3.1.2) pour (M, F, K) et pour $j \geq 2$ résulte de la même pour (M', F, K') et pour $j = -1$, de plus on a (5.3.1.3) pour $((M, F, K), S)$ et pour $j \geq 1$ d'après (5.3.8.3) et (5.3.1.3) pour $((M', F, K'), S')$, car $i_Y^*(P_l H^{-j}(X, K)) \subset P_l H^{1-j}(Y, K')$ pour $j \geq 0$ par l'injectivité de $(i_Y)_*$ ci-dessus pour $j \geq 2$. D'après (5.3.1.2) pour $j = 3$, on a des décompositions :

$$H^{-1}(X, K) = l(H^{-3}(X, K)(-1)) \oplus P_l H^{-1}(X, K) \\ H^1(X, K) = l^2(H^{-3}(X, K)(-2)) \oplus \text{Ker } l$$

compatibles avec les structures de Hodge et avec l'action de l , alors l'injectivité de

$$l: P_l H^{-1}(X, K) \rightarrow \text{Ker } l$$

résulte de (5.3.8.3) pour $j = 1$ et de la positivité, i.e. de (5.3.1.3) pour $((M', F, K'), S')$ et pour $j = 0$; d'où (5.3.1.2) pour $((M, F, K), S)$ et pour $j = 1$, car $\dim H^{-1}(X, K) = \dim H^1(X, K)$ par dualité. Donc il reste à démontrer (5.3.1.3) pour $((M, F, K), S)$ et pour $j = 0$. On va la réduire à (5.3.8.2) par la suite spectrale de Leray.

Soit L la filtration décroissante de $H^j(X, K)$ (compatible avec la structure de Hodge) associée à la suite spectrale de Leray (perverse) ci-dessus, i.e. $Gr_L^i H^{i+j}(\tilde{X}, \tilde{K}) = H^i(\mathbf{P}^1, {}^b\mathcal{A}^j p_* \tilde{K})$, on a alors

$$\pi^*(P_l H^0(X, K)) \subset L^0 H^0(\tilde{X}, \tilde{K})$$

car

$$L^0 H^0(\tilde{X}, \tilde{K}) = \text{Ker}(\tilde{i}_*^*: H^0(\tilde{X}, \tilde{K}) \rightarrow H^1(Y, K'))$$

$$P_l H^0(X, K) = \text{Ker}(i_*^*: H^0(X, K) \rightarrow H^1(Y, K'))$$

pour Y comme ci-dessus, i.e., Y est strictement non-caractéristique pour (M, F) . (En fait, $({}^p\mathcal{H}^1 p_* \tilde{K})[-1]$ est un système local dans un voisinage du point correspondant à Y , dont le fibre à ce point est $H^1(Y, K')$; donc $Gr_L^{-1} H^0(\tilde{X}, \tilde{K})$ est la partie invariante par le groupe de monodromie globale de $H^1(Y, K')$.) De plus

$$\pi^*: P_l H^0(X, K) \rightarrow Gr_L^0 H^0(\tilde{X}, \tilde{K})$$

est injectif et

$$\pi^*(P_l H^0(X, K)) \pmod{L^1} \subset H^0(\mathbb{P}^1, P_{\tilde{\Gamma}}^p \mathcal{H}^0 p_* \tilde{K})$$

où on a la décomposition compatible avec les structures de Hodge:

$$Gr_L^0 H^0(\tilde{X}, \tilde{K}) = \bigoplus \tilde{l}^k(H^0(\mathbb{P}^1, P_{\tilde{\Gamma}}^p \mathcal{H}^{-2k} p_* \tilde{K}))(-k)$$

par l'action de $\tilde{l} = \pi^* l$, car

$$\begin{aligned} \tilde{l}(L^i H^{i+j}(\tilde{X}, \tilde{K})) &\subset L^i H^{i+j+2}(\tilde{X}, \tilde{K}) \quad \text{pour } i, j \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{l}^j: Gr_L^i H^{i-j}(\tilde{X}, \tilde{K}) &\xrightarrow{\sim} Gr_L^i H^{i+j}(\tilde{X}, \tilde{K})(j) \quad \text{pour } j \geq 0 \end{aligned}$$

d'après (5.3.4.3). (En fait, la première assertion résulte du dernier isomorphisme pour $(i, j) = (1, 1)$ (et de $L^1 = Gr_L^1$) et la deuxième de cet isomorphisme pour $(i, j) = (0, 2)$, car $\pi^* \circ l = \tilde{l} \circ \pi^*$.) D'après la remarque après (5.3.8.1), on a

$$(H(a_X)_* S)(u, v) = (H(a_{\tilde{X}})_* \tilde{S})(\pi^* u, \pi^* v)$$

pour $u, v \in H^0(X, K)$ et π^* est un morphisme de structures de Hodge, car $\pi^*: H^0(X, K) \rightarrow H^0(\tilde{X}, \tilde{K})$ est induit aussi par la décomposition canonique (5.3.8.1). (Par définition, π^* est induit par l'adjonction: $\text{Hom}(\tilde{K}, \tilde{K}) \simeq \text{Hom}(K, \pi_* \tilde{K})$.) Si de plus $u, v \in P_l H^0(X, K)$, on a

$$(H(a_{\tilde{X}})_* \tilde{S})(\pi^* u, \pi^* v) = (H(a_{\mathbb{P}^1})_* {}^p\mathcal{H} p_* \tilde{S})([\pi^* u], [\pi^* v]),$$

où $[\pi^* u] := \pi^* u \pmod{L^1} \in H^0(\mathbb{P}^1, {}^p\mathcal{H}^0 p_* \tilde{K})$, car la suite spectrale de Leray perverse est auto-duale d'après 5.2.17–20. Donc d'après 5.3.4 pour $((\tilde{M}, F, \tilde{K}), \tilde{S})$ et $p: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$, l'assertion (5.3.1.3) pour $((M, F, K), S)$, $a_X: X \rightarrow pt$ et pour $j=0$ est réduite à (5.3.8.2) (appliquée à la $\mathbb{P}^1$ -composante de $P_{\tilde{\Gamma}} \mathcal{H}^0 p_*(\tilde{M}, F, \tilde{K})$), car la restriction de ${}^p\mathcal{H} p_* \tilde{S}$ aux composantes de $P_{\tilde{\Gamma}} \mathcal{H}^0 p_*(\tilde{M}, F, \tilde{K})$ à supports ponctuels est une polarisation d'après (5.3.4.4) et 5.2.14. (Notons que c'est le seul point où la compatibilité de signes est essentielle.) Pour terminer la preuve de 5.3.1 (dans le cas $\dim f(Z)=0$), il reste à démontrer (5.3.8.1–3).

5.3.9. Preuve de (5.3.8.1). D'abord on vérifie que $\pi_*(\tilde{M}, F, \tilde{K}) \in MF_k(\mathcal{D}_X, k)$ (en particulier, $\pi_*(M, F)$ est strict) et qu'on a la décomposition canonique:

$$(5.3.9.1) \quad \pi_*(\tilde{M}, F, \tilde{K}) = (M_1, F, K_1) \oplus (M_2, F, K_2)$$

telle que (M_1, F) (resp. (M_2, F)) est localement isomorphe à (M, F) (resp. $(i_A)_* i_A^*(M, F)(-1)[-2]$); alors $(M, F, K) = (M_1, F, K_1)$ est clair, car ils coïncident sur $X \setminus A$.

Soient Y un fibre de p et $i_Y, \tilde{i}_Y$ comme ci-dessus. Soient $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$ ($= A \times \mathbf{P}^1$) et $\tilde{i}_A: \tilde{A} \rightarrow \tilde{X}, \tilde{i}_A: A = \tilde{A} \cap Y \rightarrow \tilde{X}$ les inclusions naturelles. Soit g une équation locale de Y , posons $h = g\pi$. Alors $h^{-1}(0) = Y \cup \tilde{A}$, et $Y, \tilde{A}$ et $A = Y \cap \tilde{A}$ sont strictement non-caractéristiques pour $(\tilde{M}, F)$ au voisinage de $\tilde{A}$. Donc d'après 3.5.18, $(\tilde{M}, F)$ est quasi-unipotent et régulier le long de h (au voisinage de $\tilde{A}$). Soit W la filtration associée à l'action de $N = t\partial_t - \alpha$ sur Gr_α^V , cf. 1.3.9. Posons $(M', F) = i_Y^*(M, F)[-1]$, $(M'', F) = i_A^*(M, F)[-2]$ et $(M''', F) = pr_1^* i_A^*(M, F)[-1]$, où $pr_1: A \times \mathbf{P}^1 \rightarrow A$. Alors d'après 3.5.15 on a pour $-1 \leq \alpha \leq 0$:

$$Gr_i^W Gr_\alpha^V i_{h*}(\tilde{M}, F) = \begin{cases} \tilde{i}_{A*}(M'', F)(-1) & \text{si } \alpha = i = -1 \\ \text{ou } \alpha = i = 0 \\ \tilde{i}_{Y*}(M', F)(-1) \oplus \tilde{i}_{\tilde{A}*}(M''', F)(-1) & \text{si } \alpha = -1, i = 0 \\ \tilde{i}_{A*}(M'', F)(-2) & \text{si } \alpha = -1, i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie directement que $(a_{\mathbf{P}^1})_*(\mathcal{Q}_{\mathbf{P}^1}^1, F)$ est strict et que

$$H^j(a_{\mathbf{P}^1})_*(\mathcal{Q}_{\mathbf{P}^1}^1, F) = \begin{cases} (\mathcal{C}, F) & \text{si } j = -1 \\ (\mathcal{C}, F[-1]) & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $Gr_i^F \mathcal{Q}_{\mathbf{P}^1}^1 = 0$ pour $i \neq -1$ et $Gr_i^F \mathcal{C} = 0$ pour $i \neq 0$. Puisque $(M''', F) = (M'', F) \hat{\boxtimes} (\mathcal{Q}_{\mathbf{P}^1}^1, F)$, on voit que $(pr_1)_*(M''', F)$ est strict et que

$$\mathcal{H}^j(pr_1)_*(M''', F) = \begin{cases} (M'', F) & \text{si } j = -1 \\ (M'', F)(-1) & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons la suite spectrale pour $\alpha = -1, 0$:

$${}_\alpha E_1^{-i, i+j} = \mathcal{H}^j \pi_* Gr_i^W Gr_\alpha^V i_{h*}(\tilde{M}, F) \Rightarrow \mathcal{H}^j \pi_* Gr_\alpha^V i_{h*}(\tilde{M}, F),$$

on a alors

$$\begin{aligned}
{}_{-1}E_1^{pq} &= \begin{cases} i_{Y*}(M', F)(-1) & \text{si } (p, q) = (0, 0) \\ i_{A*}(M'', F)(-1) & \text{si } (p, q) = (0, -1), (1, -1) \\ i_{A*}(M'', F)(-2) & \text{si } (p, q) = (0, 1), (-1, 1) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
{}_0E_1^{pq} &= \begin{cases} i_{A*}(M'', F)(-1) & \text{si } (p, q) = (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $d_r=0$ pour $r \geq 2$, i.e. ces suites spectrales dégènèrent en E_2 . On a de plus $\mathcal{H}^j \pi_* Gr_{-1}^V i_{h*} \tilde{M} = 0$ pour $j \neq 0$, car

$$\begin{aligned}
DR(\mathcal{H}^j \pi_* Gr_{-1}^V i_{h*} \tilde{M}) &\simeq {}^p \mathcal{H}^j \pi_* \psi_{h,1} DR \tilde{M} \quad (\text{d'après 3.4.12}) \\
&\simeq \psi_{g,1} {}^p \mathcal{H}^j \pi_* DR \tilde{M} = \psi_{g,1} {}^p \mathcal{H}^j (DRM).
\end{aligned}$$

Donc $d_1: {}_{-1}E_1^{0,-1} \rightarrow {}_{-1}E_1^{1,-1}$ et $d_1: {}_{-1}E_1^{-1,1} \rightarrow {}_{-1}E_1^{0,1}$ sont des isomorphismes en oubliant la filtration. Mais ce sont des isomorphismes filtrés d'après 3.2.2 et 5.1.10 (car un endomorphisme d'un espace vectoriel filtré de dimension finie est strict, s'il est bijectif en oubliant la filtration.) Donc $\pi_* Gr^V i_{h*}(M, F)$ est strict d'après 1.3.5–6, alors d'après 3.3.17 $\pi_*(\tilde{M}, F)$ est strict, $\mathcal{H}^j \pi_*(\tilde{M}, F)$ est quasi-unipotent et régulier le long de g et

$$Gr_{\alpha}^V i_{g*} \mathcal{H}^j \pi_*(\tilde{M}, F) = \begin{cases} i_{Y*}(M', F)(-1) & \text{si } \alpha = -1, j = 0 \\ i_{A*}(M'', F)(-1) & \text{si } \alpha = 0, j = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{Z} \text{ ou } j \neq 0, \end{cases}$$

d'où $\pi_*(\tilde{M}, F, \tilde{K}) \in MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{k})$ et la décomposition (5.3.9.1) d'après 5.1.4. Donc il reste à démontrer que $(M_2, F, K_2) \simeq i_{A*} i_A^*(M, F, K)(-1)[-2]$. Puisque on n'utilise pas ce résultat dans la preuve de 5.3.1, on donne seulement l'esquisse de la preuve. On a le changement de base: $R\Gamma_{[A]} \pi_* \tilde{M} = \pi_* R\Gamma_{[\tilde{A}]} \tilde{M}$ compatible avec $i_{\tilde{A}}^! \pi_* \tilde{K} = pr_{1*} i_A^! \tilde{K}$, par l'image directe de 3.5.9; d'où $(M_2, K_2) \simeq i_{A*} i_A^*(M, K)(-1)[-2]$. De plus cet isomorphisme est compatible avec F sur un ouvert de Zariski de $A \cap Z$, alors l'assertion résulte de 3.2.2; d'où (5.3.8.1).

5.3.10. Preuve de (5.3.8.2). Soit $j: U \rightarrow X$ un ouvert de Zariski tel que $L = j^* K[-1]$ soit un système local, alors $K = (j_* L)[1]$, et $j^*((M, F, K), S)$ correspond à une variation de structures de Hodge polarisée de poids $n-1$ comme dans 5.1.10 et 5.2.12. Soit V la filtration de M , qui est la filtration de Malgrange-Kashiwara (cf. 3.1) à tout point de $X \setminus U$, et telle que $j^* V_{\alpha} M = j^* M$. D'après (3.2.1.3), on a un quasi-isomorphisme filtré:

$$a_{X*}(M, F)[-1] \leftarrow a_{X*} C((V_{-1} M, F[1]) \otimes \omega_X^{-1} \rightarrow (V_0 M, F))$$

$$(\quad = (K^*, F) \quad \text{dans } [36, (9.1)])$$

Donc d'après [36, § 7], $a_{x*}(M, F, K)$ est un complexe de Hodge de poids n ; d'où (5.3.1.1) pour $X \rightarrow pt$.

Soit $S': L \otimes L \rightarrow k_U(1-n)$ comme dans 5.2.12, alors S' est une polarisation au sens de Deligne [6], donc $S'' = (-2\pi i)^{n-1} S'$ l'est au sens de Griffiths (cf. [36]), i.e.

$$S''(C_x u, \bar{u}) \geq 0 \quad \text{pour } u \in C \otimes L_x$$

où $x \in U$. (Ici, on choisit i .) D'après [36, § 10 (b)], on a

$$\int_x j_* S''(Cu, \bar{u}) > 0 \quad \text{pour } u \in H^1(X, C \otimes j_* L) \quad \text{non nul,}$$

car

$$j_* S'': j_* L \otimes j_* L \rightarrow j_*(L \otimes L) \rightarrow j_* k_U = k_x$$

et

$$\int_x j_* S'': H^1(X, j_* L) \otimes H^1(X, j_* L) \xrightarrow{j_* S''} H^2(X, k) \xrightarrow{\int_x} k$$

correspondent au produit intérieure $\langle, \rangle$ dans [loc. cit]. Par définition (cf. [11], voir aussi la définition de ${}^p\psi$ dans 5.2.3) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, j_* L) \otimes H^1(X, j_* L) & \xrightarrow{j_* S'} & H^2(X, k(1-n)) \\ \parallel & & \parallel \\ H^0(X, K) \otimes H^0(X, K) & \xrightarrow{S} & H^0(X, a_x^! k(-n)) \end{array}$$

anti-commute. Puisque $Tr = (2\pi i)^{-1} \int_x$, on obtient (5.3.1.3) pour $i=0$ et pour $X \rightarrow pt$; d'où (5.3.8.2).

5.3.11. Preuve de (5.3.8.3). Puisque $S \circ (l \otimes id) = S \circ (id \otimes l)$ (car $l \in H^2(X)$), il suffit de vérifier la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} K \otimes K & \xrightarrow{i^* \otimes i^*} & K'[1] \otimes K'[1] \\ \downarrow l^j \otimes id & & \downarrow l^{j-1} \otimes id \\ K(j)[2j] \otimes K & & K'(j-1)[2j-1] \otimes K'[1] \\ \parallel & & \parallel (*) \\ (K \otimes K)(j)[2j] & & (K' \otimes K')(j-1)[2j] \\ \downarrow S & & \downarrow S' \\ a_x^! k(j-n)[2j] & \xleftarrow{Tr_i} & a_{x'}^! k(j-n)[2j] \end{array}$$

où $i=i_Y$, car le signe $(-1)^{j-1}$ résulte de l'isomorphisme $(*)$ dans le diagramme ci-dessus. (Notons que $K[m]=\mathbb{Z}[m]\otimes K$ par définition [11].) Puisque $i^*\circ l=l\circ i^*$, il suffit de la vérifier pour $j=1$. Par définition de S' on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K \otimes K & \xrightarrow{S} & k_X(d_X-n) [2d_X] \\ \downarrow i^* \otimes i^* & & \downarrow i^* \\ K'[1] \otimes K'[1] = (K' \otimes K') [2] & \xrightarrow{S'} & k_Y(d_X-n) [2d_X]. \end{array}$$

De plus le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K \otimes K & \xrightarrow{S} & a_X^! k(-n) \\ \downarrow l \otimes id & & \downarrow l \\ (K \otimes K) (1) [2] & \xrightarrow{S} & a_X^! k(1-n) [2] \end{array}$$

commute, donc l'assertion est réduite à la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} k_X & \xrightarrow{i^*} & k_Y \\ \downarrow l & \swarrow Tr_i = i_* & \\ k_X(1) [2] & & \end{array}$$

mais c'est la définition (du signe) de l ; d'où (5.3.8.3). Ce qui achève la démonstration de 5.3.1.

5.3.12. Remarque. Si X n'est pas lisse, on définit $MH(X, k, n)^p$ comme dans 2.1.20, en utilisant U_i et V_i . Alors cette définition est indépendante de U_i, V_i d'après 5.1.9 et 5.2.11, et $MH_Z(X, k, n)^p$ sera noté $MH_Z(k, n)^p$. De plus 5.3.1 reste valable si X et Y ne sont pas lisses.

5.4. Variations de structures de Hodge polarisables

5.4.1. Soit X une variété complexe lisse de dimension d_X , soit $(L\mathcal{O}, F, L)$ une variation de k -structures de Hodge de poids $n-d_X$ (où $L\mathcal{O}=\mathcal{O}_X\otimes L$), munie d'une polarisation

$$S': L \otimes L \rightarrow k(d_X-n).$$

On définit (M, F, K) et S par la réciproque de 5.1.10 et de 5.2.12, i.e.

$$\begin{array}{ccc} (M, F) = (\mathcal{Q}_X^{d_X}, F) \otimes \mathcal{O}(L\mathcal{O}, F), & K = L[d_X] & \\ \mathcal{H}^{-2d_X}(K \otimes K) & \xrightarrow{S} & H^{-2d_X}(a_X^! k(-n)) \\ \parallel & & \parallel \\ L \otimes L & \xrightarrow{(-1)^{d_X(d_X-1)/2} S'} & k(d_X-n) \end{array}$$

où $Gr_i^F \mathcal{Q}_X^{d_X} = 0$ pour $i \neq -d_X$.

5.4.2. Lemme. *S est compatible avec la filtration de Hodge, i.e. S induit la dualité: $(M, F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(M, F)(-n)$*

Preuve. Par définition on a

$$\widetilde{DR}(M, F)[-d_X] = [(L\mathcal{O}, F) \rightarrow \mathcal{Q}_X^1 \otimes (L\mathcal{O}, F[-1]) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{Q}_X^{d_X} \otimes (L\mathcal{O}, F[-d_X])]$$

où le dernier complexe est le complexe de de Rham usuel. Par le produit extérieure, l'accouplement S induit un morphisme de complexes filtrés:

$$\widetilde{DR}(M, F) \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{DR}(M, R)(n) \rightarrow (\mathcal{Q}_X^*, F)[2d_X]$$

où $(\mathcal{Q}_X^*, F) = (\mathcal{Q}_X^*, \sigma)$, cf. [6]. On vérifie que le morphisme correspondant:

$$\widetilde{DR}(M, F) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\widetilde{DR}(M, F), (\mathcal{Q}_X^*, F)[2d_X])(-n)$$

induit un morphisme de complexes différentiels filtrés (cf. §2):

$$\begin{aligned} \widetilde{DR}(M, F) &\rightarrow \mathcal{H}om_{\text{Diff}}^F(\widetilde{DR}(M, F), (\mathcal{Q}_X^*, F)[2d_X])(-n) \\ &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}^F(\widetilde{DR}(M, F), (\mathcal{Q}_X^{d_X}, F)[d_X])(-n) \\ &(\simeq \mathcal{D}(\widetilde{DR}(M, F))(-n)) \end{aligned}$$

et que la composition est un isomorphisme filtré; d'où l'assertion.

5.4.3. Théorème. *Soit $((M, F, K), S)$ comme dans 5.4.1, alors c'est un Module de Hodge polarisé de poids n.*

Preuve. Par récurrence sur d_X . L'assertion est claire si $d_X = 0$. En général, il faut vérifier les conditions dans 5.1.8 et la condition (5.2.10.2) pour tout g (localement définie sur X). D'abord on ramène au cas où $g^{-1}(0)$ est à croisements normaux.

Soit $f: \tilde{X} \rightarrow X$ une résolution de g , i.e. $f^{-1}g^{-1}(0)$ est à croisements normaux, cf. [13]. (Ici, X est locale.) Posons $(\tilde{M}, F, \tilde{K}, \tilde{S}) = f^*(M, F, K, S)$, alors cela correspond à la variation de structures de Hodge polarisée $f^*(L\mathcal{O}, F, L, S')$. Si les conditions ci-dessus sont satisfaites pour gf et pour $(\tilde{M}, F, \tilde{K}, \tilde{S})$, on a de même pour g et pour $P_l \mathcal{H}^0 f_*(\tilde{M}, F, \tilde{K}, \tilde{S})$ d'après 5.3.4 et 5.3.1, où l est comme dans 5.3.1. De plus $P_l \mathcal{H}^0 f_*(\tilde{M}, F, \tilde{K}, \tilde{S})$ admet la décomposition (5.1.4.3) pour la même g d'après 5.2.14. Donc il suffit de vérifier que sa X -composante (i.e. (M_1, F, K_1) dans (5.1.4.3)) est isomorphe à (M, F, K) . Mais on a un morphisme canonique:

$$f^*: (M, K) \rightarrow f_*(\tilde{M}, \tilde{K})$$

qui induit un isomorphisme $(M, K) \simeq (M_1, K_1)$ et un isomorphisme filtré $(M, F, K) \simeq (M_1, F, K_1)$ en dehors de $g^{-1}(0)$, donc l'assertion résulte de (3.2.2.1) appliqué à (M_1, F) , et on peut supposer que $g = \prod x_i^{m_i}$.

Par le même argument que ci-dessus, on peut de plus supposer que $g = (x_1 \cdots x_l)^m$. En fait, soit $f: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement ramifié tel que $gf = (x_1 \cdots x_l)^m$, et soient $(\tilde{M}, F, \tilde{K}, \tilde{S})$ et $(M_1, F, K_1) \subset \mathcal{H}^0 f_*(\tilde{M}, F, \tilde{K})$ comme ci-dessus, alors on a de même un monomorphisme canonique $f^*: (M, K) \rightarrow (M_1, K_1)$, qui scinde par $\mathcal{H}^0 f_* \tilde{S}$, car elle est une polarisation de variation de structures de Hodge sur $X \setminus g^{-1}(0)$. D'après 3.2.2 ce scindage est compatible avec F et un facteur direct coïncide avec (M, F, K) . Donc on peut appliquer 3.6.10 à (M, F) et à $g = (x_1 \cdots x_l)^m$, et on obtient:

(5.4.3.1) (M, F) est quasi-unipotent et régulier le long de g ,

(5.4.3.2) $\text{can}: \psi_{g,1}(M, F) \rightarrow \phi_{g,1}(M, F)$ est un épimorphisme strict,

(5.4.3.3) $N^i: Gr_{n-1+i}^W \psi_g(M, F) \xrightarrow{\sim} Gr_{n-1-i}^W \psi_g(M, F)(-i)$ pour $i \geq 0$,

(5.4.3.4) $P_N Gr_{n-1+i}^W \psi_g(M, F) \simeq (\mathcal{C}^m) \otimes (a_{i+1})_* a_{i+1}^*(M, F)(-i)[-i-1]$ pour $i \geq 0$ (où ϵ^{i+1} se trivialise par l'ordre des coordonnées).

Ici $\mathcal{C}^m$ est un espace vectoriel muni de l'action de T_s définie par $T_s e_k = \exp(2\pi i k/m) e_k$, où $\{e_k; k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\}$ est la base canonique de $\mathcal{C}^m$. Notons que l'isomorphisme (5.4.3.4) est compatible avec l'action de T_s (où elle est identique sur $(a_{i+1})_* a_{i+1}^*(M, F)$), et qu'il est canonique (à l'action d'une matrice diagonale sur $\mathcal{C}^m$ près). Donc d'après 5.1.7, il suffit de vérifier qu'il existe un isomorphisme (5.4.3.4) compatible avec la $\mathbb{k}$ -structure, tel que l'accouplement $Gr^W \psi_g S \circ (id \otimes N^i)$ de $P_N Gr_{n-1+i}^W \psi_g K$ coïncide, à un constant multiplicatif positif près, à la polarisation induite ${}^p a_{i+1}^* S$ de $a_{i+1}^*(M, F, K)$ (qui est reliée à $a_{i+1}^* S'$ comme dans 5.4.1), tensorisé par l'accouplement S_m de $\mathbb{Z}^m$ définie par la matrice d'identité. (Ici, l'action de T_s sur $\mathbb{Z}^m$ est définie par $T_s e'_i = e'_{i+1}$, où $\{e'_i; i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\}$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^m$.) Mais pour cela on peut supposer que $(M, F, K, S) = (\mathcal{Q}_X^{d_X}, F, K_X, S_X)$ (donc $n = d_X$), cf. 5.2.16, car on a des isomorphismes non-canoniques:

$$(M, K) \simeq \bigoplus^r (\mathcal{Q}_X^{d_X}, K_X), \mathcal{C} \otimes (K, S) \simeq \bigoplus^r (\mathcal{C} \otimes (K_X, S_X))$$

(En fait, la dernière assertion ne dépend que de $\mathcal{C} \otimes (K, S)$.) Alors on peut oublier la filtration F , car elle est triviale. Puisque l'ambiguïté de (5.4.3.4) ci-dessus est donnée par un endomorphisme du $\mathcal{C}[T_s]$ -module $\mathcal{C}^m$, il suffit de trouver un isomorphisme:

$$P_N Gr_{n-1+i}^W \psi_g K \simeq (\mathbf{Z}^m) \otimes (a_{i+1})_* a_{i+1}^* K(-i)[-i-1]$$

compatible avec l'action de T_s , tel que la condition de polarisation ci-dessus soit satisfaite. Donc l'assertion résulte de 5.2.16, si $m=1$. Pour $m>1$, on va ramener à ce cas.

Soit $\rho: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ un revêtement ramifié tel que $\pi^* t = t^m$, où t est la coordonnée de $\mathbf{C}$. Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{C} \end{array}$$

un diagramme cartésien, soit $\sigma: Y \rightarrow X'$ la normalisation, posons $U = h^{-1}\mathbf{C}^*$, $\tilde{\pi} = \pi\sigma$, $f = h\sigma$, on a alors des isomorphismes canoniques:

$${}^p\psi_g(K_X, S_X) \simeq \pi_* {}^p\psi_h(K_U, S_U) \simeq \tilde{\pi}_* {}^p\psi_f(K_Y, S_Y)$$

par définition de ${}^p\psi$; de plus ce sont compatibles avec l'action de T_s (où sur les deux derniers elle est induite par un générateur du groupe de transformation) et celle de N (à un constant multiplicatif positif près). Puisque $(Y, f) = \amalg (Y_i, f_i)$ et chaque (Y_i, f_i) s'identifie à $(X, g^{1/m})$ par $\tilde{\pi}$, on obtient l'assertion. Ce qui achève la démonstration de 5.4.3.

5.4.4. Soient Z une variété analytique complexe irréductible, U un ouvert de Zariski lisse de Z , soit $(M, F, K) \in MH(U, \mathbf{k}, n)$ muni d'une polarisation S . Supposons que K soit lisse, i.e. $L := K[-\dim U]$ soit un système local, alors (M, F, K) correspond à $(\mathcal{L}\mathcal{O}, F, L)$ une variation de A -structures de Hodge polarisée d'après 3.2.7 et vice versa d'après 5.4.3; donc on dit que (M, F, K) est une variation de structures de Hodge si K est lisse. Soit $((M, F, K), S)$ une variation de structure de Hodge polarisée, on dit que $((M, F, K), S)$ est *semi-géométrie rel.* à Z , s'il existe un morphisme projectif $f: X \rightarrow Z$ tel que X soit lisse, et s'il existe $((M', F, K'), S')$ une variation de structures de Hodge polarisée sur X telle que (M, F, K) soit un facteur direct de $\mathcal{H}^i f'_*(M', F, K')(m)$ pour quelques $i, m \in \mathbf{Z}$ (où f' est la restriction de f à $f^{-1}(U)$) et que S coïncide avec la restriction de la polarisation induite par $f_* S'$ et de l . (Notons que les assertions (5.3.1.2-3) induisent une polarisation de $\mathcal{H}^i f_*(M, F, K)$.) On dit que $((M, F, K), S)$ est *géométrie rel.* à Z , si on peut prendre $\mathbf{k}_X[d_X]$ pour K' . On dit que $((M, F, K), S)$ est *localement (semi-) géométrie rel.* à Z , si pour tout $z \in Z$, il existe un voisinage W de z tel que la restriction de $((M, F, K), S)$

à $W \cap U$ soit (semi-) géométrique rel à W .

5.4.5. Corollaire. *Avec les notations de 5.3.12 et 5.4.4, si $((M, F, K), S)$ est localement semi-géométrique rel. à Z , il existe uniquement $(\tilde{M}, F, \tilde{K}) \in MH_Z(\mathbb{k}, n)^p$ avec la polarisation $\tilde{S}$, dont la restriction à U coïncide à $((M, F, K), S)$.*

Preuve. Puisque l'assertion est locale, on peut supposer que $((M, F, K), S)$ est semi-géométrique, alors $((M, F, K), S)$ est un facteur direct de la restriction à U de $\mathcal{H}^i f_*((M', F, K'), S')$ ($m \in MH(Z, \mathbb{k}, n)^p$, cf. 5.3.12. Mais celui-ci se décompose par supports stricts. Soit $((M_Z, F, K_Z), S_Z)$ sa Z -composante, alors $((M, F, K), S)$ est un facteur direct de $((M_Z, F, K_Z), S_Z)|_U$, donc il existe un facteur direct $((\tilde{M}, F, \tilde{K}), \tilde{S})$ de $((M_Z, F, K_Z), S_Z)$, dont la restriction à U coïncide à $((M, F, K), S)$ d'après 3.2.2–3 et 5.1.7; d'où l'assertion.

5.4.6. Remarque. Dans le cas algébrique, on dit que $(M, F, K) \in MH_Z(\mathbb{k}, n)^p$ (polarisé par S) est (localement) géométrique, si sa restriction à un ouvert lisse non vide de Z soit une variation de structures de Hodge (localement) géométrique. Notons que “localement géométrique” coïncide avec “géométrique” par définition, et qu'on peut éliminer “rel. à Z ” d'après Nagata, Hironaka. Alors 5.4.5 entraîne que les Modules de Hodge géométriques sont stables par image directe intermédiaire (et nécessairement polarisables).

5.4.7. Corollaire. *Soient Z une variété projective irréductible, U un ouvert lisse non vide de Z , $(L\mathcal{O}, F, L)$ une variation de structures de Hodge géométrique (algébriquement) de poids $n - \dim Z$ sur U , alors les cohomologies d'intersection $IH^i(Z, L)$ sont munies d'une structure de Hodge canonique polarisable de poids $n + i$, qui ne dépend que de U et, est fonctorielle pour, $(L\mathcal{O}, F, L)$, où $IH^i(Z, L) = H^i(Z, \mathcal{I}C_Z(L))$ et $\mathcal{I}C_Z(L) = i_{!*}L[\dim Z]$ avec $i: U \rightarrow Z$. En particulier, les cohomologies d'intersection $IH^i(Z)$ de Z sont munies d'une structure de Hodge canonique polarisable de poids $\dim Z + i$.*

(Cela résulte de 5.3.1 et 5.4.5.)

5.4.8. Corollaire. *Soient $f: Z \rightarrow Y$ un morphisme projectif de variétés complexes analytiques, L un système local sur un ouvert de Zariski lisse de Z , sous-jacent à une variation de structures de Hodge polarisée localement semi-géométrique rel. à Z ; posons $K = \mathcal{I}C_Z(L)$, on a alors le théorème de décomposition:*

$$(5.4.8.1) \quad f_* K = \bigoplus (\mathcal{H}^i f_* K)[-i] \quad \text{dans} \quad D_c^b(\mathbb{k}_Y)$$

(5.4.8.2) ${}^p\mathcal{H}^i f_* K$ est une somme directe de complexes d'intersection (associés à un système local).

Preuve. Puisque (5.4.8.1) résulte de Lefschetz vache d'après [8], on voit que les assertions sont locales; on peut donc supposer que Y est lisse et que Z est une sous-variété fermée d'une variété complexe lisse X , alors 5.4.8 résulte de 5.3.1 et 5.4.5.

5.4.9. Remarque. Soient X une variété complexe lisse, Z une sous-variété fermée irréductible de X , U un ouvert de Zariski lisse de Z , et (L, F) un $\mathcal{D}_U$ -Module filtré sous-jacent à une variation de structures de Hodge polarisable. Soient $i: U \rightarrow X' := X \setminus (Z \setminus U)$ et $j: X' \rightarrow X$ les inclusions naturelles. Posons $(M', F) = i_*(L, F)$ et $M = j_* M'$, i.e. M est un $\mathcal{D}_X$ -Module holonome régulier tel que $M|_{X'} \simeq M'$ et que $\mathcal{H}_{X \setminus X'}^0(M) = \mathcal{H}_{X \setminus X'}^0(\mathbf{D}M) = 0$. Soit $M(0)$ le $\mathcal{O}_X$ -sous-Module de M défini par:

(5.4.9.1) L'ordre modifié au sens de [2, (1.2.1)] est ≤ 0 à tout point lisse de la variété caractéristique de M .

Alors Brylinski a défini sa filtration de Hodge:

$$F_p' M = \sum (M(0) \cap j_* F_{p-i} M') (F_i \mathcal{D}_X),$$

et conjecturé que le théorème de décomposition est valable avec cette filtration de Hodge: pour $f: X \rightarrow Y$ un morphisme projectif et pour (M, F) comme ci-dessus, $f_*(M, F)$ est une somme directe de $\mathcal{D}_Y$ -Modules filtrés de même type [loc. cit.]. Malheureusement il y a un contre-exemple plutôt trivial à cette conjecture. D'abord on observe:

(5.4.9.2) Si $Gr_p^F L = 0$ pour $p \neq 0$, on a $F_p' M = M(0) (F_p \mathcal{D}_X)$
i.e. $Gr^{F'} M$ est engendré par $Gr_0^{F'} M$ sur $Gr^F \mathcal{D}_X$,

car on a localement $M' \simeq L \otimes \mathbb{C}[\partial]$ avec $M(0)|_U = L \otimes 1$. Soient $X = \mathbb{C}^3$, $Z = \{P=0\}$, $U = Z \setminus \{0\}$ avec P un polynôme homogène de degré $d \geq 4$. Soit $Y \rightarrow Z$ l'éclatement de 0, posons $f: Y \rightarrow Z \rightarrow X$, on a alors:

(5.4.9.3) $f_*(\omega_Y, F) = (M, F) \oplus (\mathcal{B}_{\{0\}|X}, F[1])$, où M est défini comme ci-dessus pour $L = \omega_U$, mais $Gr_1^F M \neq (Gr_0^F M) (Gr_1^F \mathcal{D}_X)$.

On a donc $(M, F) \neq (M, F')$. Pour éviter ce contre-exemple, on peut ajouter à la fin de (5.4.9.1) la condition "sauf $T_X^* X$ ". (Mais dans ce cas $M(0)$ n'est plus cohérent sur $\mathcal{O}_X$.) Grâce à la difficulté du calcul de l'ordre de Kashiwara-Kawai [18], je ne connais pas de contre-exemple à cette version modifiée. Mais pour la conjecturer, il y en a trop peu d'évidence (sauf le cas à croisements

normaux).

5.4.10. Remarque. Dans le cas algébrique, on peut construire la catégorie des Modules de Hodge mixtes géométriques, qui correspond à celle des faisceaux pervers mixtes d'origine géométrique [1] (en particulier, la filtration de monodromie relative existe toujours). Les détails seront donnés dans l'article suivant.

Bibliographie

- [1] A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, *Astérisque*, **100** (1982), 5–171.
- [2] J.-L. Brylinski, Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge II, *Astérisque*, **101–102** (1983), 75–117.
- [3] ———, (Co)homologie d'intersection et faisceaux pervers. Séminaire Bourbaki, n° 585, *Astérisque*, **92–93** (1982), 129–157.
- [4] J. Cheeger, M. Goresky, R. MacPherson, L^2 -cohomology and intersection homology, of singular algebraic varieties, in *Seminar on Differential Geometry*, Ann. Math. Studies, **102** (1982), 303–340.
- [5] H. Clemens, Degeneration of Kähler manifolds, *Duke Math. J.*, **44** (1977), 215–290.
- [6] P. Deligne, Théorie de Hodge, I, *Actes du Congrès international des Mathématiciens* (Nice, 1970), 425–430, II et III, *Publ. Math. IHES*, **40** (1971), 5–57 et **44** (1974), 5–77.
- [7] ———, La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES*, **52** (1980), 137–252.
- [8] ———, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHES*, **35** (1968), 107–126.
- [9] ———, Cohomologie à supports propres, SGA4 XVII, Springer Lecture Note, **305** (1973), 250–461.
- [10] ———, Le formalisme des cycles évanescents, SGA7 XIII, Springer Lecture Note, **340** (1973), 82–115.
- [11] ———, Positivité: signe, I (manuscrit, 16–2–84), II (manuscrit, 6–11–85).
- [12] O. Gabber, The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. Math.*, **103** (1981), 445–468.
- [13] H. Hironaka: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II, *Ann. Math.*, **79** (1964), 109–203.
- [14] ———, Stratification and flatness, in *Real and complex singularities* (Proc. Ninth Nordic Summer School/NA VF Sympos. Math., Oslo, 1976), 199–265. Sijthoff and Noordhoff Alphen aan den Rijn, 1977.
- [15] C. Houzel, P. Schapira, Images directes des modules différentiels, *C.R. Acad. Sci.*, **298** (1984), 461–464.
- [16] M. Kashiwara, On the maximally overdetermined system of linear differential equations, I, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **10** (1974/75), 563–579.
- [17] ———, Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations, Springer Lecture Note, **1016** (1983), 134–142.
- [18] M. Kashiwara, T. Kawai, On the holonomic systems of micro-differential equations, III, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **17** (1981), 813–979.
- [19] M. Kashiwara, P. Schapira, Microlocal study of sheaves, *Astérisque*, **128** (1985), 1–235.
- [20] R. Kiehl, J.-L. Verdier, Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert, *Math. Ann.*, **195** (1971), 24–50.
- [21] G. Laumon, Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$ -Modules filtrés, Springer Lecture Note,

- 1016** (1983), 151–237.
- [22] B. Malgrange, Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence, *Astérisque*, **101–102** (1983) 243–267.
 - [23] Z. Mebkhout, Théorème de bidualité pour les $\mathcal{D}_X$ -Modules holonomes, *Arkiv für Math.*, **20** (1982), 111–124.
 - [24] D. Quillen, Higher algebraic K-theory. I, Springer Lecture Note, **341** (1973), 85–147.
 - [25] J-P. Ramis, G. Ruget, J-L. Verdier, Dualité relative en géométrie analytique complexe, *Inv. Math.*, **13** (1971), 261–283.
 - [26] M. Saito, Hodge filtration on Gauss-Manin systems. I, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, Sect. I A **30** (1984), 489–498, II, *Proc. Japan Acad.*, Ser. A **59** (1983), 37–40.
 - [27] ———, $\mathcal{D}$ -Modules filtrés et structures de Hodge mixtes (manuscrit, oct. 1983).
 - [28] ———, Hodge structure via filtered $\mathcal{D}$ -Modules, *Astérisque*, **130** (1985), 342–351.
 - [29] J.H.M. Steenbrink, Limits of Hodge structures, *Inv. Math.*, **31** (1975/76), 229–257.
 - [30] ———, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, in *Rael and complex singularities* (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), 525–563. Stijhoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
 - [31] J-L. Verdier, Catégories dérivées, Etat 0. in *SGA 4 1/2*, Springer Lecture Note **569** (1977), 262–308.
 - [32] ———, Dualité dans les espaces localement compacts, Séminaire Bourbaki n° **300** (1965/66).
 - [33] ———, Dimension des espaces localement compacts. *C.R. Acad. Sci. Paris* **261** (1965), 5293–5296.
 - [34] ———, Extension of a perverse sheaf over a closed subspace, *Asterisque* **130** (1985), 210–217.
 - [35] A.N. Varchenko, The asymptotics of holomorphic forms define a mixed Hodge structure, *Soviet. Math. Dokl.*, **22** (1980), 772–775.
 - [36] S. Zucker, Hodge theory with degenerating coefficients, L_2 cohomology in the Poincaré metric, *Ann. Math.*, **109** (1979), 415–476.
 - [37] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
 - [38] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Élément de géométrie algébrique III, *Publ. Math. IHES*, **11** (1961).
 - [39] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966.

